

INSTITUTO SUPERIOR DE CIÊNCIAS DO TRABALHO E DA EMPRESA
FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

DEPARTAMENTO DE FINANÇAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Ciências
ULisboa

ISCTE  **Business School**
Lisbon University Institute

Pricing American-style Options under the Heston Model

Kevin Morgado de Sousa

Mestrado em Matemática Financeira

Dissertação orientada por: Professor Doutor João Pedro Vidal Nunes

2018

Resumo

Nesta tese, estuda-se o problema associado à avaliação de opções Americanas através da aplicação de um esquema de diferenças finitas, tendo como base um modelo de volatilidade estocástica. É do conhecimento geral que os ativos financeiros contêm variações na sua volatilidade devido maioritariamente ao conhecido e bem estudado *volatility smile*. Por isso, neste trabalho será adotado um modelo definido por dois fatores, um para a evolução do preço do ativo subjacente e outro para os valores da volatilidade: o modelo de Heston (1993). Estando definida a equação parcial estocástica que descreve a evolução do preço da opção sob o modelo de Heston, é aplicado um esquema de diferenças finitas, neste caso o de Crank-Nicolson, que consiste em substituir as derivadas parciais por aproximações às diferenças centradas e progressivas, complementando-o posteriormente com condições de fronteira condizentes com as características das opções (neste cenário opções de venda). A utilização deste método acaba por ser uma ferramenta para depois, com a evolução do tempo, chegarmos ao preço para uma opção Americana, utilizando um mecanismo que incorpore a particularidade de exercício antecipado (algoritmo de Brennan e Schwartz [1977]).

É estudada também a eficiência e estabilidade do método com o intuito de o validar para futura utilização, onde os valores são comparados com a solução de Heston (para as opções Europeias) e com valores de alta precisão para opções Americanas provenientes do método de geração de *path-independent trees* usando o *control variate method*. Para efeitos de implementação, é usado o *Matlab*.

Palavras-chave: Opções Americanas; Volatilidade Estocástica; Método de Diferenças Finitas; Esquema de Crank-Nicolson.

Abstract

In this thesis, is studied the problem with the valuation of the American options through the application of a appropriate finite difference scheme, based on a stochastic volatility model. It's global knowledge that the financial assets have fluctuation in the volatility, due mostly to the known and well studied volatility smile. Therefore, in this work we will adopt a model defined by two factors, one for the evolution of the underlying asset price and another for the volatility values: the Heston model (1993). Given the partial stochastic equation that describes the evaluation of the option price under the Heston model, a finite difference scheme is applied, in this case the Crank-Nicolson scheme, which consists in replace the partial derivatives by approximation to the centered and forward differences, complemented later with border condition consistent with the characteristics of the options (in this scenario). The use of this method turns out to be a tool for later, with the evolution of time, we arrive at the price for the American options, using a mechanism that incorporates the particularity of anticipated exercise (Brennan and Schwartz algorithm [1977]).

The efficiency and stability of the method is also studied in order to validate for future use, where the values are compared with the exact solution of Heston (for the European options), and with high precision values for American options from the method of generating path-independent trees using the control variate method. For implementation purpose, Matlab is used.

Keywords: Pricing American options; Stochastic Volatility; Finite difference method; Crank-Nicolson scheme

Conteúdo

Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	vi
1. Introdução	1
2. Modelo de Heston	4
2.1. O modelo de Heston	4
2.2. Opções de venda Americanas	6
2.3. Derivação da equação diferencial parcial de Heston (1993)	9
3. Método das diferenças finitas	13
3.1. Construção da malha	14
3.2. Esquema de Crank-Nicolson	16
3.3. Condições na fronteira	22
4. Análise do esquema de diferenças finitas	31
4.1. Estabilidade	32
4.2. Convergência	35
4.3. Erro de truncamento	38
5. Opções Americanas	44
5.1. Algoritmo de Brennan e Schwartz (1977)	44
5.2. Estabilidade e Convergência	45
6. Resultados	46
6.1. O método de Beliaeva e Nawalkha (2010)	46
6.2. Comparação entre a performance dos dois métodos	47

6.3. Limitação do método de Crank-Nicolson	51
7. Conclusão	52
A. Construção da matriz M	53
B. Código Matlab	57

Lista de Figuras

4.1. Payoff da <i>put</i> Europeia.	33
4.2. Avaliação da <i>put</i> Europeia com $\tau = 0.08333$; $N = 100$	34
4.3. Avaliação da <i>put</i> Europeia com $N = 10$	34
4.4. $S_0 = 105$ e $v_0 = 0.04$	35
4.5. $S_0 = 100$ e $v_0 = 0.04$	36
4.6. $S_0 = 95$ e $v_0 = 0.16$	36
5.1. Avaliação da <i>put</i> Americana com $\tau = 0.08333$ e $N = 100$	45
5.2. $S_0 = 105$, $v_0 = 0.04$ e $\tau = 0.25$	45

Lista de Tabelas

2.1. Valor da multiplicação das derivadas simbólicas.	10
4.1. Parâmetros do Modelo	31
4.2. Parâmetros do Método	32
6.1. Resultados do método de Crank-Nicolson.	48
6.2. Resultados do método de Crank-Nicolson com a alteração: $y_t = \sqrt{v_t}$	50

1. Introdução

As opções são contratos financeiros derivados que, embora existam há muito tempo, tiveram a sua grande explosão a partir de 1973, fundamentalmente com a publicação do trabalho desenvolvido por Black e Scholes (1973) e Merton (1973).

Uma opção confere ao seu detentor o direito, e não a obrigação, de comprar (call) ou vender (put) um determinado ativo financeiro pelo preço estabelecido no contrato (preço de exercício ou strike), durante ou numa data futura (maturidade da opção), enquanto que o vendedor tem a obrigação de concluir a transação. Após essa data a opção extingue-se. Se o direito por parte do detentor puder ser exercido apenas na data de vencimento do contrato da opção, esta denomina-se por Europeia. Por outro lado, se o direito puder ser exercido durante toda a vida da opção, ela designa-se por Americana.

As opções mais simples dão-se pelo nome de vanilla calls e puts. Numa vanilla call o ganho (payoff) do titular será a diferença entre a cotação do ativo subjacente na data em que é exercida e o strike, se a diferença for positiva. Do mesmo modo, numa vanilla put o ganho será a diferença entre o strike e a cotação do ativo na data em que é exercida, se a mesma for positiva. Dito isto, o grande aliciante das opções é determinar o valor justo que o seu titular tem de pagar para lhe ser conferido esse direito.

O modelo de Black e Scholes (1973) [3] e Merton (1973) [16] revolucionaram a teoria do preço das opções, porém utiliza alguns pressupostos irreais, nomeadamente que a volatilidade e a taxa de juro são conhecidas e constantes. Na realidade, a volatilidade pode mover-se significativamente (saltos) e a taxa sem risco também não é constante. As flutuações entre esse preço e o preço real das opções resulta na conhecida *volatility smile* (Hull [2018] [12]). Uma maneira de capturar a existência do "*volatility smile*" é assumir que a volatilidade é estocástica. Devido a esta realidade novos modelos foram propostos, como foi o caso do modelo de Heston (1993) [11], que se destina a acomodar a existência da *volatility smile* no mercado das opções.

Para avaliar opções Europeias segundo este modelo, recorre-se a funções características, tal como é descrito em Heston (1993). Já no caso das opções Americanas, o problema da sua

avaliação não é linear de todo.

Esta tese tem como objetivo lidar com esse problema na determinação dos valores das opções, a avaliação das opções americanas sob volatilidade estocástica.

Para esse fim é aplicado o método de diferenças finitas. Os métodos de diferenças finitas são uma abordagem popular na avaliação das opções devido à sua fácil implementação e flexibilidade. Eles trabalham substituindo as derivadas na equação diferencial parcial por diferenças finitas. Foram usados pela primeira vez para calcular soluções numéricas para opções por Schwartz (1977) [17], e desenvolvidas mais tarde por Courtadon (1982) [6], que propôs uma aproximação mais precisa. Os métodos de diferenças finitas são especialmente adequados para problemas de baixa dimensão, onde o preço depende de um único fator, a evolução do preço do ativo subjacente, e para a avaliação de opções com exercício antecipado, como é o caso das opções Americanas. Nesta tese será utilizado para problemas de baixa dimensão com volatilidade estocástica, onde o preço dependerá de dois fatores, do valor do ativo subjacente e da volatilidade, tornando-se um pouco mais complexo na sua análise. Começaremos por analisar o modelo utilizado, especificando a sua equação diferencial estocástica (EDP) e aproximando-a a um esquema de diferenças finitas, neste caso o esquema de Crank-Nicolson. Primeiramente o método será construído para uma opção Europeia e só depois convertido para Americana, tendo em conta a possibilidade do exercício antecipado, utilizando o algoritmo de Brennan e Schwartz (1977) [4]. Depois faremos uma breve revisão ao trabalho de Believa e Nawalkha (2010) [2], para depois utilizarmos os seus resultados como meio comparativo com os obtidos pelo método em estudo. Finalmente comentaremos os resultados e apontaremos os problemas do método.

Mais especificamente, este trabalho está organizado como:

- No capítulo 2 começaremos por especificar os fundamentos por detrás do modelo de Heston (1993), bem como a derivação da sua equação diferencial parcial (EDP). Terminaremos com a introdução ao tema das opções Americanas e das suas particularidades;
- No capítulo 3 veremos como resolver a equação de Heston, utilizando como abordagem as diferenças finitas, começando por especificar a malha e as suas dimensões. Depois indicaremos as condições de fronteira do problema, e como proceder para as contornar;
- No capítulo 4 analisaremos o esquema proposto (primeiro para as opções Europeias) quanto à sua estabilidade, convergência e erro, a fim de validar o método para utilização futura;
- No capítulo 5 especificaremos o mecanismo para converter a opção Europeia, com o intuito de chegar aos valores da opção Americana. De seguida testaremos a mesma

para depois a validar;

- No capítulo 6 descreveremos e analisaremos os resultados obtidos, comparando-os com valores de alta precisão para o preço de opções Americanas. Depois de analisar os resultados, faremos alusão às limitações e problemas do método em estudo.

2. Modelo de Heston

Antes de se aplicar o método de diferenças finitas é necessário definir o método de avaliação para derivar a equação às diferenças parciais, neste caso a EDP de Heston. A determinação dos valores segue o modelo de Heston (1993) [11].

2.1. O modelo de Heston

Como já foi mencionado, embora a fórmula de Black-Scholes ofereça uma explicação considerável sobre o preço de opções, sabe-se que tem algumas limitações. Nesse âmbito novos modelos foram propostos, como é o caso do modelo de Heston (1993), que ofereceu um modelo de volatilidade estocástica que permite obter uma solução fechada para o preço de opções Europeias, quando o preço spot do ativo subjacente está correlacionado com a volatilidade. Começemos por assumir que o preço do ativo subjacente no instante t segue o processo de difusão:

$$dS_t = S_t(r - q)dt + S_t\sqrt{v_t}dW_1(t), \quad (2.1)$$

onde $r > 0$ é taxa de juro sem risco, q é a *continuous dividend yield*, S_t é o preço do ativo subjacente no instante t , $v_t > 0$ denota a variância instantânea e $\{W_1(u) : 0 \leq u \leq t\}$ é um movimento Browniano padrão inicializado a 0.

Heston (1993) assume que a volatilidade segue um processo Ornstein-Uhlenbeck (usado por Stein e Stein [1991] [18]):

$$d\sqrt{v_t} = -\beta\sqrt{v_t}dt + \delta dW_2(t). \quad (2.2)$$

Recorrendo ao lema de Itô com $f(\sqrt{v_t}) = (\sqrt{v_t})^2$, expressamos a equação anterior em dv_t ¹:

$$\begin{aligned}
df(\sqrt{v_t}) &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial \sqrt{v_t}}d\sqrt{v_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial (\sqrt{v_t})^2}d(\sqrt{v_t})^2 \\
&= 2\sqrt{v_t} \times (-\beta\sqrt{v_t}dt + \delta dW_2(t)) + \frac{1}{2} \times 2\delta^2 dt \\
&= -2\beta v_t dt + 2\delta\sqrt{v_t}dW_2(t) + \delta^2 dt \\
&= (\delta^2 - 2\beta v_t)dt + 2\delta\sqrt{v_t}dW_2(t) \\
&= 2\beta\left(\frac{\delta^2}{2\beta} - v_t\right)dt + 2\delta\sqrt{v_t}dW_2(t).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Esta equação pode ser reescrita como um processo de raiz quadrada (usado por Cox, Ingersoll and Ross [1985] [7]):

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_2(t), \tag{2.4}$$

onde $\theta = \frac{\delta^2}{2\beta}$ é a média de longo prazo da variância instantânea, $\kappa = 2\beta$ com $\kappa \geq 0$ é a velocidade de reversão para a média da volatilidade, $\sigma = 2\delta$ é a volatilidade do processo de variância, e $\{W_2(u) : 0 \leq u \leq t\}$ é um movimento Browniano padrão inicializado em 0.

Estes parâmetros são escolhidos de maneira a satisfazer a condição de Feller (1951) [9]:

$$\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} \geq 1. \tag{2.5}$$

¹ $d\sqrt{v_t} \times d\sqrt{v_t} = \beta^2 v_t dt^2 + \delta^2 dt - 2\beta\sqrt{v_t}\delta dt dW_2(t) = \delta^2 dt.$

Esta condição de estabilidade assegura que o processo de variância v_t permanece positivo, isto se começar com um valor positivo de v_0 .

Os dois movimentos Brownianos estão correlacionados entre si, de tal modo que, $d < W_1, W_2 >_t = \rho dt$; com $\rho \in [-1, 1]$.

2.2. Opções de venda Americanas

O grande objetivo desta tese passa por avaliar as opções Americanas (nomeadamente as opções de venda), que são mais complexas principalmente porque o ponto de exercício ótimo depende da solução da política de exercício ótimo, onde ou o exercício antecipado ocorre, ou a opção é mantida, seguindo o mesmo processo que uma opção Europeia.

Consideremos então uma opção de venda (put) Americana sobre um ativo com preço S_t no instante t , que segue o processo descrito na equação (2.1) e com uma volatilidade representada pela equação (2.4). A opção de venda com um strike K e maturidade T sobre um ativo S , tem o seu valor a cada instante de t , com $t \in [0, T]$. Sendo assim o preço da opção é representado como função do tempo, $p(t, S_t, v_t)$.

Segundo Fouque (2000) [10] uma maneira intuitiva de avaliar o preço de uma opção Americana no instante t , é maximizar o valor esperado dos payoff's descontados sobre todos os tempos de paragem $s \leq T$:

$$p(t, S_t, v_t) = \sup_{s \in [t, T]} \mathbb{E} \left\{ e^{-r \times (T \wedge s - t)} h(S_{T \wedge s}, v_{T \wedge s}) \right\}, \quad (2.6)$$

com s a ser um tempo aleatório que maximiza a opção, tal que o evento $\{s > t\}$, pertence à filtração F_t para qualquer $t \leq T$. Por outras palavras s é um tempo de paragem no espaço de probabilidade (Ω, F, P) relativamente à filtração $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$. O payoff da opção de venda é dado por h , com o seu valor no instante s ($s \leq T$), a ser dado por; $h(S_s, v_s) = (K - S_s)^+$, para um determinado preço de exercício K com S_s e v_s a corresponderem ao preço do ativo e ao valor da variância no tempo de paragem s .

Analisando a função payoff da opção, uma diminuição do preço do subjacente (S_t), aumenta o seu payoff, com isso o seu detentor irá preferir exercer numa data $s \geq t$ que corresponda ao menor preço possível para o subjacente no horizonte temporal $[t, T]$. Assim é natural pensar que a estratégia de exercício ótimo, seja dada em função de um certo valor limite, $L < K$, para o preço do subjacente.

O nível L vai depender do tempo para a maturidade ($T - t$) e da volatilidade, isto é:

$$L = L(T - t, v_{T-t}),$$

e é de esperar que L diminua com o aumento de volatilidade.

Sendo assim a fronteira de exercício é dada por:

$$\partial C = \{(t, S_t, v_t) \in R_+^3 \mid S_t = L(T - t, v_{T-t})\}. \quad (2.7)$$

A fronteira de exercício é a fronteira que separa o domínio em duas partes separadas, região de continuação e região de exercício (paragem).

A região de continuação é a região onde é ótimo manter a opção e é definida por:

$$C = \{(t, S_t, v_t) \in R_+^3 \mid S_t > L(T - t, v_{T-t})\}. \quad (2.8)$$

Nesta região o comportamento da opção Americana é igual ao de uma opção Europeia.

Em contrapartida, a região de exercício (paragem) é a região onde é ótimo exercer a opção e é definida por:

$$S = \{(t, S_t, v_t) \in R_+^3 \mid S_t \leq L(T - t, v_{T-t})\}. \quad (2.9)$$

A solução de $p(t, S_t, v_t)$ tem também de satisfazer a condição que previne que o valor da opção de venda caia abaixo da função payoff (Brennan e Schwartz [1977] [17]):

$$p(t, S_t, v_t) \geq \max [K - S_t; 0]. \quad (2.10)$$

Esta condição é intuitiva e fácil de entender pois se for violada uma oportunidade de arbitragem é criada. Se o preço da opção é mais baixo do que o da sua função de payoff, a opção é comprada e automaticamente exercemos a opção e com a repetição deste processo podemos ganhar uma quantia infinita de dinheiro.

É fácil perceber que o valor máximo que a opção pode ter é o do seu preço de exercício, se o preço do ativo (subjacente) cair para 0:

$$p(t, S_t, v_t) \leq K. \quad (2.11)$$

O valor mínimo da opção nunca poderá ser inferior a 0, pois trata-se de um contrato que confere um direito

$$p(t, S_t, v_t) \geq 0. \quad (2.12)$$

2.3. Derivação da equação diferencial parcial de Heston (1993)

Para estudar o problema do preço das opções, iremos considerar, por exemplo, uma opção de venda Europeia sobre o ativo subjacente S , com o preço de exercício K e maturidade T . O preço no instante t ($\leq T$) será designado por V_t .

A *equivalent martingale measure* (EMM) \mathbb{Q} pressupõe que o preço relativo de qualquer ativo financeiro em unidades da *money-market-account* é uma \mathbb{Q} -martingale, isto é:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{K_u}{B_u} | F_t \right] = \frac{K_t}{B_t}, \quad (2.13)$$

$\forall u \geq t$, onde $B_t = B_0 \times e^{rt}$ denota o valor da *money-market-account* no momento t .

A medida \mathbb{Q} pressupõe que qualquer ativo financeiro se valoriza à taxa de juro sem risco (*risk neutral measure*). Então,

$$V_t = e^{-r \times (T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [(K - S_T) \mathbb{I}_{K > S_T} | F_t] \quad (2.14)$$

O valor da opção (payoff) V_T na maturidade é conhecido, contudo para encontrar os valores em tempos anteriores é necessário saber como V evolui como função de S_t, v_t e T .

Recorrendo ao lema de Itô para duas variáveis, o seguinte resultado é obtido:

$$dV(t, S_t, v_t) = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial V}{\partial v_t} dv_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v_t^2} (dv_t)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S_t \partial v_t} dS_t dv_t, \quad (2.15)$$

onde S_t é moldado pelo *geometric Brownian motion* (2.1) e v_t segue o processo de raiz quadrada da equação (2.4). Utilizando essas definições ficamos com:

$$\begin{aligned}
(dS_t)^2 &= (S_t(r - q)dt)^2 + (S_t\sqrt{v_t}dW_1(t))^2 + (S_t(r - q)dt)(S_t\sqrt{v_t}dW_1(t)) \\
&= S_t^2(r - q)^2dt^2 + S_t^2v_tdW_1(t)^2 + S_t^2(r - q)\sqrt{v_t}dtdW_1(t) \\
&= S_t^2v_tdt
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
(dv_t)^2 &= (\kappa(\theta - v_t)dt)^2 + (\sigma\sqrt{v_t}dW_2(t))^2 + (\kappa(\theta - v_t)dt)(\sigma\sqrt{v_t}dW_2(t)) \\
&= \kappa^2(\theta - v_t)^2dt^2 + \sigma^2v_tdW_2(t)^2 + \kappa(\theta - v_t)\sigma\sqrt{v_t}dtdW_2(t) \\
&= \sigma^2v_tdt
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
dS_tdv_t &= (S_t(r - q)dt + S_t\sqrt{v_t}dW_1(t))(\kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_2(t)) \\
&= S_t(r - q)\kappa(\theta - v_t)dt^2 + S_t(r - q)\sigma\sqrt{v_t}dtdW_2(t) \\
&\quad + S_t\sqrt{v_t}\kappa(\theta - v_t)dW_1(t)dt + S_t\sigma v_tdW_1(t)dW_2(t) \\
&= S_t\sigma v_tdW_1(t)dW_2(t) \\
&= S_t\sigma v_t\rho dt,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

atendendo às regras de multiplicação descritas na Tabela 2.1:

\times	dt	dW ₁ (t)	dW ₂ (t)
dt	0	0	0
dW ₁ (t)	0	dt	ρdt
dW ₂ (t)	0	ρdt	dt

Tabela 2.1.: Valor da multiplicação das derivadas simbólicas.

Com os resultados das equações (2.16) - (2.18) e rearranjando a equação (2.15), ficamos com:

$$\begin{aligned}
dV(t, S_t, v_t) &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S_t} (S_t(r - q)dt + S_t\sqrt{v_t}dW_1(t)) + \frac{\partial V}{\partial v_t} (\kappa(\theta - v_t)dt \\
&\quad + \sigma\sqrt{v_t}dW_2(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} (S_t^2 v_t dt) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v_t^2} (\sigma^2 v_t dt) + \frac{\partial^2 V}{\partial S_t \partial v_t} (S_t \sigma v_t \rho dt) \\
&= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + S_t(r - q) \frac{\partial V}{\partial S_t} + \kappa(\theta - v_t) \frac{\partial V}{\partial v_t} + S_t^2 v_t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \sigma^2 v_t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v_t^2} \right. \\
&\quad \left. + S_t \sigma v_t \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S_t \partial v_t} \right] dt + S_t \sqrt{v_t} \frac{\partial V}{\partial S_t} dW_1(t) + \sigma \sqrt{v_t} \frac{\partial V}{\partial v_t} dW_2(t).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Visto que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[dV(t, S_t, v_t | F_t)] = r \times V \times dt, \tag{2.20}$$

e como a equação (2.19) implica que ²

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[dV(t, S_t, v_t | F_t)] &= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + S_t(r - q) \frac{\partial V}{\partial S_t} + \kappa(\theta - v_t) \frac{\partial V}{\partial v_t} + S_t^2 v_t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \right. \\
&\quad \left. + \sigma^2 v_t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v_t^2} + S_t \sigma v_t \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S_t \partial v_t} \right] dt,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

²O valor esperado de $S_t \sqrt{v_t} \frac{\partial V}{\partial S_t} dW_1(t) + \sigma \sqrt{v_t} \frac{\partial V}{\partial v_t} dW_2(t)$ é 0.

então, combinando (2.20) com (2.21) obtém-se a EDP de Heston:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial V}{\partial t} + S_t(r - q) \frac{\partial V}{\partial S_t} + \kappa(\theta - v_t) \frac{\partial V}{\partial v_t} + S_t^2 v_t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \sigma^2 v_t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v_t^2} + S_t \sigma v_t \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S_t \partial v_t} \right] dt \\
& = r \times V \times dt \\
& \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial t} + S_t(r - q) \frac{\partial V}{\partial S_t} + \kappa(\theta - v_t) \frac{\partial V}{\partial v_t} + S_t^2 v_t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \sigma^2 v_t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v_t^2} + S_t \sigma v_t \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S_t \partial v_t} \quad (2.22) \\
& = rV \\
& \Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial t} + S_t(r - q) \frac{\partial V}{\partial S_t} + \kappa(\theta - v_t) \frac{\partial V}{\partial v_t} + S_t^2 v_t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + \sigma^2 v_t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial v_t^2} + S_t \sigma v_t \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S_t \partial v_t} \\
& - rV = 0.
\end{aligned}$$

3. Método das diferenças finitas

Neste capítulo será abordado o método das diferenças finitas para converter a EDP de Heston satisfeita pelo preço da opção em cada instante num conjunto de equações diferenciais. Este método sendo uma das técnicas para a diferenciação de uma função discreta, será utilizado nesta tese com o intuito de resolver o problema das opções Americanas, onde é preciso ter em atenção cada instante de tempo para avaliar a possibilidade de exercício antecipado. No caso das opções Europeias o processo é mais simples, recorrendo-se a funções características, tal como é descrito em Heston (1993).

O método das diferenças finitas é o método mais utilizado para resolver equações diferenciais parciais e tem como base substituir as derivadas parciais presentes na EDP por diferenças finitas apropriadas. Essas diferenças obtêm-se da série de Taylor da função derivada.

Os esquemas numéricos mais usuais deste método são: explícito, implícito e Crank-Nicolson. Nesta tese irá ser utilizado o esquema de Crank-Nicolson, por ser implícito no tempo e numericamente estável.

Por motivos de simplificação, nesta tese serão adotadas as seguintes alterações na EDP (2.22):

$$x_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_0} \right),$$
$$T - t = \tau,$$
(3.1)

e

$$W(\tau, x_t, v_t) = V(t, S_t, v_t).$$

Esta primeira simplificação tem como objetivo obter coeficientes constantes, isto é, coeficientes independentes de S , embora ainda dependam de outra variável de estado, e é sugerido por Brennan e Schwartz (1978) [5].

A segunda simplificação leva-nos à substituição do tempo desde a origem t , pelo tempo até a maturidade τ , ficando com a igualdade $dt = -d\tau$.

A terceira simplificação é uma consequência imediata das duas anteriores.

Utilizando a equação (3.1), a equação (2.22) fica:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial W}{\partial \tau} + S_t(r - q)\frac{\partial W}{\partial x_t}\frac{1}{S_0 e^{(x_t)}} + \kappa(\theta - v_t)\frac{\partial W}{\partial v_t} + S_t^2 v_t \frac{1}{2} \frac{1}{S_0^2 e^{(2x_t)}} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_t^2} \right. \\ & \left. - \frac{\partial W}{\partial x_t} \right) + \sigma^2 v_t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial v_t^2} + S_t \sigma v_t \rho \frac{\partial^2 W}{\partial x_t \partial v_t} \frac{1}{S_0 e^{(x_t)}} - rW = 0. \end{aligned}$$

Uma vez que,

$$S_t = S_0 e^{(x_t)}; \quad S_t^2 = S_0^2 e^{(2x_t)}; \quad \partial S_t = S_0 e^{(x_t)} \partial x_t; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial S_t^2} = \frac{1}{S_t^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_t^2} - \frac{\partial W}{\partial x_t} \right). \quad (3.2)$$

ficamos com a equação transformada,

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial W}{\partial \tau} + \left(r - q - \frac{1}{2} v_t \right) \frac{\partial W}{\partial x_t} + \kappa(\theta - v_t) \frac{\partial W}{\partial v_t} + \frac{1}{2} v_t \frac{\partial^2 W}{\partial x_t^2} + \sigma^2 \frac{1}{2} v_t \frac{\partial^2 W}{\partial v_t^2} \\ & + \rho \sigma v_t \frac{\partial^2 W}{\partial x_t \partial v_t} - rW = 0. \end{aligned}$$

3.1. Construção da malha

Antes de ser implementado o esquema numérico, é necessário começar por criar uma malha de pontos. Para o efeito, define-se uma malha como um conjunto finito de pontos, chamados nós da malha. Para aproximar a EDP (3.2) a valores numéricos, devemos primeiro distinguir as nossas três dimensões relevantes: o tempo para a maturidade τ , x_t e v_t . De seguida, é preciso discretizar as variáveis, criando três partições nos intervalos $[0, \tau]$, $[-X, X]$

e $[0, V]$. As partições vão estar uniformemente divididas por N , $2N_x$ e N_v com passos de dimensão:

$$h = \frac{\tau}{N}; \quad l = \frac{2 \times X}{2 \times N_x} = \frac{X}{N_x}; \quad m = \frac{V}{N_v}, \quad (3.3)$$

ficando assim com malha de pontos

$[(\tau_k, x_j, v_i) \mid k = 0, \dots, N \quad j = -N_x, \dots, 0, \dots, N_x \quad i = 0, \dots, N_v]$ com respetivamente $N + 1$, $2N_x + 1$ e $N_v + 1$ pontos.

Tal permite-nos considerar, de agora em diante,

$$W(\tau_k, x_j, v_i) = W(hk, lj, mi) = W_{j,i}^k, \quad (3.4)$$

como o valor da opção no ponto (τ_k, x_j, v_i) da malha.

De salientar que $\tau_0 = 0$ corresponde ao tempo de calendário T (data em que a opção expira), enquanto que $\tau_N = Nh = \tau$ é a data de calendário t , isto é, a data de avaliação.

O grande objetivo passa então por encontrar o valor da opção no momento W_{j^*, i^*}^N , para j^* e i^* tais que $x_{j^*} = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ e $v_{i^*} = v_t$ (S_0 é o valor do preço do ativo na data de avaliação). O fato de incorporar S_0 na simplificação (3.1) tem como finalidade fazer com que o valor do preço do ativo subjacente na data de avaliação t se encontre sempre na posição 0 da partição do x , ou seja, x_0 .¹

Em resumo, para construirmos a malha precisamos de especificar 8 constantes: N , N_x , N_v , τ , X , V , S_0 e v_0 (valor da variância na data de avaliação).

¹ $x_0 = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \Leftrightarrow S_0 e^{0 \cdot l} = S_t \Leftrightarrow S_0 = S_t$.

3.2. Esquema de Crank-Nicolson

O esquema de derivadas finitas de Crank-Nicolson é um esquema baseado na média aritmética das diferenças finitas de segunda ordem, centradas em x_j e v_i e calculadas em t_{k+1} e t_k , sendo de segunda ordem no espaço. É também estável e convergente (Duff [2002] [8]).

Agora as derivadas parciais presentes na EDP (3.2) serão substituídas por uma aproximação às diferenças progressivas e aproximações às diferenças centradas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial t} &= -\frac{\partial W}{\partial \tau} \approx -\frac{W_{j,i}^{k+1} - W_{j,i}^k}{h}; \\
\frac{\partial W}{\partial x_t} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{W_{j+1,i}^{k+1} - W_{j-1,i}^{k+1}}{2l} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{W_{j+1,i}^k - W_{j-1,i}^k}{2l} \right); \\
\frac{\partial W}{\partial v_t} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{W_{j,i+1}^{k+1} - W_{j,i-1}^{k+1}}{2m} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{W_{j,i+1}^k - W_{j,i-1}^k}{2m} \right); \\
\frac{\partial^2 W}{\partial x_t^2} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{W_{j+1,i}^{k+1} - 2W_{j,i}^{k+1} + W_{j-1,i}^{k+1}}{l^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{W_{j+1,i}^k - 2W_{j,i}^k + W_{j-1,i}^k}{l^2} \right); \\
\frac{\partial^2 W}{\partial v_t^2} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{W_{j,i+1}^{k+1} - 2W_{j,i}^{k+1} + W_{j,i-1}^{k+1}}{m^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{W_{j,i+1}^k - 2W_{j,i}^k + W_{j,i-1}^k}{m^2} \right); \\
\frac{\partial^2 W}{\partial x_t \partial y_t} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{W_{j+1,i+1}^{k+1} - W_{j-1,i+1}^{k+1} - W_{j+1,i-1}^{k+1} + W_{j-1,i-1}^{k+1}}{4ml} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{W_{j+1,i+1}^k - W_{j-1,i+1}^k - W_{j+1,i-1}^k + W_{j-1,i-1}^k}{4ml} \right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Substituindo as equações (3.5) na EDP (3.2), temos

$$\begin{aligned}
& -\frac{W_{j,i}^{k+1} - W_{j,i}^k}{h} + \frac{(r - q - \frac{1}{2}v_t)}{4l} [W_{j+1,i}^{k+1} - W_{j-1,i}^{k+1} + W_{j+1,i}^k - W_{j-1,i}^k] + \frac{\kappa(\theta - v_t)}{4m} \\
& [W_{j,i+1}^{k+1} - W_{j,i-1}^{k+1} + W_{j,i+1}^k - W_{j,i-1}^k] + \frac{v_t}{4l^2} [W_{j+1,i}^{k+1} - 2W_{j,i}^{k+1} + W_{j-1,i}^{k+1} + W_{j+1,i}^k \\
& - 2W_{j,i}^k + W_{j-1,i}^k] + \frac{\sigma^2 v_t}{4m^2} [W_{j,i+1}^{k+1} - 2W_{j,i}^{k+1} + W_{j,i-1}^{k+1} + W_{j,i+1}^k - 2W_{j,i}^k + W_{j,i-1}^k] \quad (3.6) \\
& + \frac{\rho\sigma v_t}{8ml} [W_{j+1,i+1}^{k+1} - W_{j-1,i+1}^{k+1} - W_{j+1,i-1}^{k+1} + W_{j-1,i-1}^{k+1} + W_{j+1,i+1}^k - W_{j-1,i+1}^k \\
& - W_{j+1,i-1}^k + W_{j-1,i-1}^k] - rW_{j,i}^k = 0.
\end{aligned}$$

Separando os termos e agrupando-os por ponto de malha,

$$\begin{aligned}
& W_{j+1,i}^{k+1} \times \left(\frac{(r - q - \frac{1}{2}v_t)}{4l} + \frac{v_t}{4l^2} \right) + W_{j-1,i}^{k+1} \times \left(-\frac{(r - q - \frac{1}{2}v_t)}{4l} + \frac{v_t}{4l^2} \right) + W_{j,i+1}^{k+1} \times \\
& \left(\frac{\kappa(\theta - v_t)}{4m} + \frac{\sigma^2 v_t}{4m^2} \right) + W_{j,i-1}^{k+1} \times \left(-\frac{\kappa(\theta - v_t)}{4m} + \frac{\sigma^2 v_t}{4m^2} \right) + W_{j,i}^{k+1} \times \left(-\frac{v_t}{2l^2} - \frac{\sigma^2 v_t}{2m^2} - \frac{1}{h} \right) + \\
& \frac{\rho\sigma v_t}{8ml} \times (W_{j+1,i+1}^{k+1} - W_{j-1,i+1}^{k+1} - W_{j+1,i-1}^{k+1} + W_{j-1,i-1}^{k+1}) + W_{j+1,i}^k \times \left(\frac{(r - q - \frac{1}{2}v_t)}{4l} \right. \\
& \left. + \frac{v_t}{4l^2} \right) + W_{j-1,i}^k \times \left(-\frac{(r - q - \frac{1}{2}v_t)}{4l} + \frac{v_t}{4l^2} \right) + W_{j,i+1}^k \times \left(\frac{\kappa(\theta - v_t)}{4m} + \frac{\sigma^2 v_t}{4m^2} \right) \\
& + W_{j,i-1}^k \times \left(-\frac{\kappa(\theta - v_t)}{4m} + \frac{\sigma^2 v_t}{4m^2} \right) + W_{j,i}^k \times \left(-\frac{v_t}{2l^2} - \frac{\sigma^2 v_t}{2m^2} + \frac{1}{h} - r \right) + \frac{\rho\sigma v_t}{8ml} \times \\
& (W_{j+1,i+1}^k - W_{j-1,i+1}^k - W_{j+1,i-1}^k + W_{j-1,i-1}^k) = 0.
\end{aligned} \quad (3.7)$$

Separando W^{k+1} de W^k e multiplicando ambos os lados por $(-h)$, expressamos (3.7) em:

$$\begin{aligned}
& W_{j+1,i}^{k+1} \times h\left(-\frac{(r-q-\frac{1}{2}v_t)}{4l} - \frac{v_t}{4l^2}\right) + W_{j-1,i}^{k+1} \times h\left(\frac{(r-q-\frac{1}{2}v_t)}{4l} - \frac{v_t}{4l^2}\right) + W_{j,i+1}^{k+1} \\
& \times h\left(-\frac{\kappa(\theta-v_t)}{4m} - \frac{\sigma^2 v_t}{4m^2}\right) + W_{j,i-1}^{k+1} \times h\left(\frac{\kappa(\theta-v_t)}{4m} - \frac{\sigma^2 v_t}{4m^2}\right) + W_{j,i}^{k+1} \times \\
& (1 + h(\frac{v_t}{2l^2} + \frac{\sigma^2 v_t}{2m^2})) + h(\frac{-\rho\sigma v_t}{8ml}) \times (W_{j+1,i+1}^{k+1} - W_{j-1,i+1}^{k+1} - W_{j+1,i-1}^{k+1} + W_{j-1,i-1}^{k+1}) \\
& = -W_{j+1,i}^k \times h\left(-\frac{(r-q-\frac{1}{2}v_t)}{4l} - \frac{v_t}{4l^2}\right) - W_{j-1,i}^k \times h\left(\frac{(r-q-\frac{1}{2}v_t)}{4l} - \frac{v_t}{4l^2}\right) - \\
& W_{j,i+1}^k \times h\left(-\frac{\kappa(\theta-v_t)}{4m} - \frac{\sigma^2 v_t}{4m^2}\right) - W_{j,i-1}^k \times h\left(\frac{\kappa(\theta-v_t)}{4m} - \frac{\sigma^2 v_t}{4m^2}\right) - W_{j,i}^k \times (-1 + \\
& h(\frac{v_t}{2l^2} + \frac{\sigma^2 v_t}{2m^2} + r)) - h(\frac{-\rho\sigma v_t}{8ml}) \times (W_{j+1,i+1}^k - W_{j-1,i+1}^k - W_{j+1,i-1}^k + W_{j-1,i-1}^k).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Substituindo $v_t = im$, onde m é o step na direção de v , (3.8) dá a lugar a:

$$\begin{aligned}
& P1_{j,i}W_{j+1,i}^{k+1} + P2_{j,i}W_{j-1,i}^{k+1} + P3_{j,i}W_{j,i+1}^{k+1} + P4_{j,i}W_{j,i-1}^{k+1} + P5_{j,i}W_{j,i}^{k+1} + P6_{j,i} \times \\
& (W_{j+1,i+1}^{k+1} - W_{j-1,i+1}^{k+1} - W_{j+1,i-1}^{k+1} + W_{j-1,i-1}^{k+1}) = -P1_{j,i}W_{j+1,i}^k - P2_{j,i}W_{j-1,i}^k \\
& - P3_{j,i}W_{j,i+1}^k - P4_{j,i}W_{j,i-1}^k - (P5_{j,i} - 2 + rh)W_{j,i}^k - P6_{j,i} \times (W_{j+1,i+1}^k - W_{j-1,i+1}^k \\
& - W_{j+1,i-1}^k + W_{j-1,i-1}^k),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

onde as probabilidades de transição são independentes de j e dadas por

$$\begin{aligned}
P1_{j,i} &= h \times \left[\frac{-im(-\frac{l}{2} + 1) - l(r - q)}{4l^2} \right] \\
P2_{j,i} &= h \times \left[\frac{-im(\frac{l}{2} + 1) + l(r - q)}{4l^2} \right] \\
P3_{j,i} &= h \times \left[-\frac{\kappa(\theta - im)}{4m} - \frac{\sigma^2 \times im}{4m^2} \right] \\
P4_{j,i} &= h \times \left[\frac{\kappa(\theta - im)}{4m} - \frac{\sigma^2 \times im}{4m^2} \right] \\
P5_{j,i} &= 1 + h \times \left[\frac{im}{2l^2} + \frac{\sigma^2 \times im}{2m^2} \right] \\
P6_{j,i} &= h \times \left[\frac{-\rho \sigma im}{8lm} \right],
\end{aligned} \tag{3.10}$$

para todo o $i = 1, \dots, N_v - 1$.

De notar que $P1_{j,i} + P2_{j,i} + P3_{j,i} + P4_{j,i} + P5_{j,i} = 1$.

Para cada passo $k + 1$, o propósito é obter W^{k+1} através de W^k para os pontos da malha de x e v . Para o efeito, a equação (3.9) pode ser reescrita como:

$$M \cdot W^{k+1} = D \cdot W^k, \tag{3.11}$$

com $k = 0, \dots, N - 1$, M e D duas matrizes de dimensões $^{2} (2N_x - 1)I \times (2N_x - 1)I$ e W^k um vector com a sua ordenação normal contendo todos os valores da opção no instante k , dados por:

² $I=N_v - 1$.

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_2 & A_2 & B_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_3 & A_3 & B_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & C_{I-1} & A_{I-1} & B_{I-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & C_I & A_I \end{bmatrix}; \quad W^k = \begin{bmatrix} W_{-N_x+1,1} \\ W_{-N_x+2,1} \\ \vdots \\ W_{N_x-1,1} \\ W_{-N_x+1,2} \\ \vdots \\ W_{N_x-1,2} \\ \vdots \\ W_{N_x-1,I} \end{bmatrix}.$$

A equação (3.9) implica que se resolva simultaneamente um conjunto grande de $(2N_x - 1)I$ equações lineares. A ideia passa então por criar uma série de sub-matrizes dentro da matriz principal M . Para cada sub matriz é fixado um passo para o v_t (que é indicado pelo índice de cada sub-matriz; por exemplo, A_1 é a matriz fixada para o primeiro passo de v_t , $i = 1$) e percorridos todos os valores para x , linha a linha, de modo a que representem todas as equações lineares para $i = 1, 2, \dots, -I$. Ou seja, cada equação corresponde a uma linha da matriz. Por exemplo, a primeira linha da matriz é referente aos coeficientes da equação (3.9), quando $j = -N_x + 1$ e $i = 1$ e a segunda linha para os coeficientes, quando $j = -N_x + 2$ e $i = 1$ (apêndice A).

Portanto A, B e C são matrizes triagonais com dimensões $(2N_x - 1) \times (2N_x - 1)$, dadas por:

$$A_i = \begin{bmatrix} P5_{-N_x+1,i} & P1_{-N_x+1,i} & 0 & \dots & 0 \\ P2_{-N_x+2,i} & P5_{-N_x+2,i} & P1_{-N_x+2,i} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & P2_{N_x-2,i} & P5_{N_x-2,i} & P1_{N_x-2,i} \\ 0 & \dots & \dots & P2_{N_x-1,i} & P5_{N_x-1,i} \end{bmatrix};$$

$$B_i = \begin{bmatrix} P3_{-N_x+1,i} & P6_{-N_x+1,i} & 0 & \dots & 0 \\ -P6_{-N_x+2,i} & P3_{-N_x+2,i} & P6_{-N_x+2,i} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -P6_{N_x-2,i} & P3_{N_x-2,i} & P6_{N_x-2,i} \\ 0 & \dots & \dots & -P6_{N_x-1,i} & P3_{N_x-1,i} \end{bmatrix};$$

$$C_i = \begin{bmatrix} P4_{-N_x+1,i} & -P6_{-N_x+1,i} & 0 & \dots & 0 \\ P6_{-N_x+2,i} & P4_{-N_x+2,i} & -P6_{-N_x+2,i} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & P6_{N_x-2,i} & P4_{N_x-2,i} & -P6_{N_x-2,i} \\ 0 & \dots & \dots & P6_{N_x-1,i} & P4_{N_x-1,i} \end{bmatrix}.$$

Ao analisar as equações (3.9) e (3.11), observa-se que a matriz D é em tudo semelhante à matriz M , podendo por isso ser obtida através desta com uma ligeira alteração. Essa alteração prende-se com o elemento da diagonal principal da matriz M - $P5_{j,i}$ (com $j=-N_x+1 \dots 0 \dots N_x-1$ e $i=1 \dots N_v-1$), o qual impede que as matrizes (D e M) sejam simétricas.

Por esse motivo é necessário proceder a uma operação utilizando a matriz M , de modo a que a diagonal principal da matriz D fique:

$$-(P5_{j,i} - 2 + r \times h), \quad (3.12)$$

e os restantes elementos, simétricos à matriz M .

A matriz D irá ser obtida a partir de:

$$D = (2 - r \times h) \times I - M, \quad (3.13)$$

onde I é a matriz identidade de dimensões iguais à matriz M .

Esta equação faz jus ao que foi referido, alterando somente a diagonal principal da matriz M e colocando todos os outros elementos simétricos.³

³ $(2 - rh) \times 1 - P5_{j,i} = -(P5_{j,i} - 2 + rh).$

3.3. Condições na fronteira

Enquanto a equação (3.9) nos fornece as soluções para os valores na malha, desde que estejam rodeados por pontos em todas as outras direções, existem limitações a considerar quando se encontram numa das quatro fronteiras, máximo e mínimo de x e v . Com o intuito de resolver o sistema anterior de maneira completa é necessário discretizar os valores das condições na fronteira, e isto irá levar a modificações nas matrizes descritas na secção anterior. Os limites discretos estão localizados em $j = -N_x$, $i = 0$, $j = N_x$ e $i = N_v$, ficando com um sistema $(2N_x - 1)I \times (2N_x - 1)I$ para os nós internos.

Os valores das condições na fronteira discretizados, dizem respeito a uma opção de venda, sendo os seguintes: ⁴

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial W(\tau, x_t, v_t)}{\partial x_t} \right|_{x_t = -N_x \times l} &= -S_0 e^{x_t} = -S_0 e^{-N_x \times l}, \\
\left. \frac{\partial W(\tau, x_t, v_t)}{\partial x_t} \right|_{x_t = l \times N_x} &= 0; \\
\left. \frac{\partial W(\tau, x_t, v_t)}{\partial v_t} \right|_{v_t \rightarrow \infty} &= 0; \\
-\frac{\partial W}{\partial \tau} + (r - q) \frac{\partial W}{\partial x_t} + \kappa \theta \frac{\partial W}{\partial v_t} - rW &= 0. \quad ^5
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Na fronteira em $j = -N_x$, isto é, para valores de spot muito pequenos e recorrendo às equações (3.1) e (3.14), bem como à aproximação de diferenças progressivas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial x_t} = -S_0 e^{-N_x \times l} &\Leftrightarrow \frac{W_{-N_x, i}^k - W_{-N_x+1, i}^k}{-l} = -S_0 e^{-N_x \times l} \\
&\Leftrightarrow W_{-N_x, i}^k = W_{-N_x+1, i}^k + \lambda,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

com $\lambda = S_0 e^{-N_x \times l} \times l$.

⁴Para valores de spot pequenos a mudança de preço infinitesimal da put é $\frac{\partial V}{\partial S_t} = -1$ e como $\frac{\partial S_t}{\partial x_t} = S_0 e^{x_t}$, então: $\frac{\partial V}{\partial S_t} = \frac{\partial W}{\partial x_t} \times \frac{1}{S_0 e^{x_t}} = -1 \Leftrightarrow \frac{\partial W}{\partial x_t} = -S_0 e^{x_t}$.

⁵Deriva da seguinte substituição na EDP (3.2): $v_t = 0$.

Na fronteira em $j = N_x$, isto é, para valores de spot muito altos e recorrendo às equações (3.1) e (3.14), bem como à aproximação de diferenças regressivas:

$$\frac{\partial V}{\partial x_t} = 0 \Leftrightarrow \frac{W_{N_x,i}^k - W_{N_x-1,i}^k}{l} = 0 \Leftrightarrow W_{N_x,i}^k = W_{N_x-1,i}^k. \quad (3.16)$$

Conclui-se que o último ponto da malha no eixo do x , é uma cópia do valor anterior.

A fronteira em $i = 0$, ou seja, para $v_t = 0$ pode ter a sua própria equação, substituindo essa condição na EDP de Heston e resolvendo de maneira similar à equação completa de Heston, como é visto na equação (3.6).

Artigos como por exemplo, Ikonen e Toivanen (2004) [13], desenvolveram métodos numéricos para avaliar opções Americanas sob o modelo de Heston, argumentando que quando a volatilidade é 0, como não há aleatoriedade, o preço e o payoff são determinísticos, $p(t, S_t, 0) = (K - S_t)^+$. Este não é no entanto o caso, já que v_t é um processo de reversão de média do modelo de Heston, significando que se $v_t = 0$, então quase certamente dv_t é positivo, tornando o processo do preço do ativo não determinístico.

De seguida, x e τ são tratados da mesma maneira que na expressão (3.5). No caso de v , a substituição é feita pela derivada progressiva, uma vez que não é possível incorporar volatilidade negativa. Consequentemente o seguinte esquema de Crank-Nicolson é descoberto:

$$\begin{aligned} & -\frac{W_{j,i}^{k+1} - W_{j,i}^k}{h} + \frac{(r-q)}{4l} [W_{j+1,i}^{k+1} - W_{j-1,i}^{k+1} + W_{j+1,i}^k - W_{j-1,i}^k] + \frac{\kappa\theta}{2m} [W_{j,i+1}^{k+1} \\ & - W_{j,i}^{k+1} + W_{j,i+1}^k - W_{j,i}^k] - rW_{j,i}^k = 0. \end{aligned}$$

Rearranjando,

$$\begin{aligned} & W_{j,i}^{k+1} \times \left(-\frac{1}{h} - \frac{\kappa\theta}{2m}\right) + W_{j+1,i}^{k+1} \times \frac{(r-q)}{4l} - W_{j-1,i}^{k+1} \times \frac{(r-q)}{4l} + W_{j,i+1}^{k+1} \times \left(\frac{\kappa\theta}{2m}\right) \\ & = W_{j,i}^k \times \left(-\frac{1}{h} + \frac{\kappa\theta}{2m} + r\right) - W_{j+1,i}^k \times \frac{(r-q)}{4l} + W_{j-1,i}^k \times \frac{(r-q)}{4l} - W_{j,i+1}^k \times \left(\frac{\kappa\theta}{2m}\right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

e finalmente,

$$\begin{aligned} & W_{j,0}^{k+1} \times \left(-\frac{1}{h} - \frac{\kappa\theta}{2m}\right) + W_{j+1,0}^{k+1} \times \frac{(r-q)}{4l} + W_{j-1,0}^{k+1} \times \frac{-(r-q)}{4l} + W_{j,1}^{k+1} \times \left(\frac{\kappa\theta}{2m}\right) \\ & = W_{j,0}^k \times \left(-\frac{1}{h} + \frac{\kappa\theta}{2m} + r\right) - W_{j+1,0}^k \times \frac{(r-q)}{4l} + W_{j-1,0}^k \times \frac{(r-q)}{4l} - W_{j,1}^k \times \left(\frac{\kappa\theta}{2m}\right). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por $-h$ a equação (3.17) pode ser reescrita utilizando o seguinte processo iterativo:

$$\begin{aligned}
QW_0^{k+1} &= Q1W_0^k + [h \times (\frac{\kappa\theta}{2m})(W_1^{k+1} + W_1^k)] \\
\Leftrightarrow W_0^{k+1} &= Q^{-1} \times [Q1W_0^k + h \times (\frac{\kappa\theta}{2m})(W_1^{k+1} + W_1^k)]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\Leftrightarrow W_0^{k+1} = Q^{-1} \times [h \times (\frac{\kappa\theta}{2m})W_1^{k+1}] + Q^{-1} \times [Q1W_0^k + h \times (\frac{\kappa\theta}{2m})W_1^k],$$

onde Q é uma matriz triagonal $(h \times (\frac{(r-q)}{4l}); 1 + h \times (\frac{\kappa\theta}{2m}); -h \times (\frac{(r-q)}{4l}))$ e $Q1$ é obtida através da matriz Q , num procedimento similar ao que acontece com a matriz D na equação (3.12):

$$Q1 = (2 - r \times h) \times I - Q. \tag{3.19}$$

Na fronteira em $i = N_v$, isto é, para valores de volatilidade elevados o procedimento utilizado é em tudo similar ao da fronteira em $j = N_x$, usando a equação (3.14) e (3.1):

$$\frac{\partial W}{\partial v_t} = 0 \Leftrightarrow \frac{W_{j,i}^k - W_{N_x,i-1}^k}{m} = 0 \Leftrightarrow W_{j,i}^k = W_{j,i-1}^k \tag{3.20}$$

É necessária também impor a condição de possibilidade de exercício antecipado da opção, pois nesta tese os elementos em estudo serão as opções de venda (put) Americanas. Sendo assim, para a condição da região de paragem, isto é, $S_j \leq L(\tau_k, v_i)$, o payoff do exercício antecipado será:

$$W_{j,i}^k = (K - S_0 e^{x_j})^+. \tag{3.21}$$

Por fim é necessário uma condição inicial que nos forneça valores iniciais para o método começar a progredir. Depois da transformação $T - t = \tau$ é imediato que a condição inicial em $\tau = 0$ ($k = 0$) que corresponde à data da maturidade da opção, sendo por isso dada pela função payoff que nos indica quanto é que se recebe por exercer a opção:

$$W_{j,i}^0 = \max(K - S_0 e^{x_j} ; 0), \quad (3.22)$$

para $j = -N_x \dots 0 \dots N_x$.

Devemos agora resolver o conjunto de equações lineares implicadas na equação (3.9), para $j = -N_x + 1, j = N_x - 1, i = 1$ e $i = N_v - 1$. Estes são os valores para os quais o problema da fronteira terá de ser resolvido (consiste em nós não resolvidos, o que significa que precisamos de modificar a matriz).

Para $j = -N_x + 1$ a equação (3.9) produz:

$$\begin{aligned}
& P1_{-N_x+1,i} W_{-N_x+2,i}^{k+1} + P2_{-N_x+1,i} W_{-N_x,i}^{k+1} + P3_{-N_x+1,i} W_{-N_x+1,i+1}^{k+1} + P4_{-N_x+1,i} \\
& W_{-N_x+1,i-1}^{k+1} + P5_{-N_x+1,i} W_{-N_x+1,i}^{k+1} + P6_{-N_x+1,i} \times (W_{-N_x+2,i+1}^{k+1} - W_{-N_x,i+1}^{k+1} \\
& - W_{-N_x+2,i-1}^{k+1} + W_{-N_x,i-1}^{k+1}) = -P1_{-N_x+1,i} W_{-N_x+2,i}^k - P2_{-N_x+1,i} W_{-N_x,i}^k \\
& - P3_{-N_x+1,i} W_{-N_x+1,i+1}^k - P4_{-N_x+1,i} W_{-N_x+1,i-1}^k - (P5_{-N_x+1,i} - 2 \\
& + r \times h) W_{-N_x+1,i}^k - P6_{-N_x+1,i} \times (W_{-N_x+2,i+1}^k - W_{-N_x,i+1}^k - W_{-N_x+2,i-1}^k \\
& + W_{-N_x,i-1}^k).
\end{aligned}$$

Usando a condição de fronteira (3.15), então (3.23)

$$\begin{aligned}
& W_{-N_x+1,i-1}^{k+1} \times (P6_{-N_x+1,i} + P4_{-N_x+1,i}) + W_{-N_x+1,i}^{k+1} \times (P2_{-N_x+1,i} + P5_{-N_x+1,i}) \\
& + W_{-N_x+1,i+1}^{k+1} \times (-P6_{-N_x+1,i} + P3_{-N_x+1,i}) + P1_{-N_x+1,i} W_{-N_x+2,i}^{k+1} + P6_{-N_x+1,i} \times \\
& (W_{-N_x+2,i+1}^{k+1} - W_{-N_x+2,i-1}^{k+1}) = -W_{-N_x+1,i-1}^k \times (P6_{-N_x+1,i} + P4_{-N_x+1,i}) \\
& - W_{-N_x+1,i}^k \times (P2_{-N_x+1,i} + (P5_{-N_x+1,i} - 2 + r \times h)) - W_{-N_x+1,i+1}^k \times (\\
& - P6_{-N_x+1,i} + P3_{-N_x+1,i}) - P1_{-N_x+1,i} W_{-N_x+2,i}^k - P6_{-N_x+1,i} \times (W_{-N_x+2,i+1}^k \\
& - W_{-N_x+2,i-1}^k) + [-P2_{-N_x+1,i} \times (\lambda + \lambda)].
\end{aligned}$$

Devido às modificações anteriores é necessário que a matriz M seja alterada para o conjunto de valores de entrada $j = -N_x + 1$ e $1 \leq i \leq N_v - 1$ (o primeiro elemento de cada sub-coluna de W) e é necessário também ser adicionado no lado direito do problema principal (equação (3.11)) uma outra matriz S , para as mesmas entradas que contemple o último termo da equação.

Para $j = N_x - 1$ a equação (3.9) produz:

$$\begin{aligned}
& P1_{N_x-1,i}W_{N_x,i}^{k+1} + P2_{N_x-1,i}W_{N_x-2,i}^{k+1} + P3_{N_x-1,i}W_{N_x-1,i+1}^{k+1} + P4_{N_x-1,i}W_{N_x-1,i-1}^{k+1} \\
& + P5_{N_x-1,i}W_{N_x-1,i}^{k+1} + P6_{N_x-1,i} \times (W_{N_x,i+1}^{k+1} - W_{N_x-2,i+1}^{k+1} - W_{N_x,i-1}^{k+1} + W_{N_x-2,i-1}^{k+1}) \\
& = -P1_{N_x-1,i}W_{N_x,i}^k - P2_{N_x-1,i}W_{N_x-2,i}^k - P3_{N_x-1,i}W_{N_x-1,i+1}^k - P4_{N_x-1,i} \\
& W_{N_x-1,i-1}^k - (P5_{N_x-1,i} - 2 + r \times h)W_{N_x-1,i}^k - P6_{N_x-1,i} \times (W_{N_x,i+1}^k - W_{N_x-2,i+1}^k \\
& - W_{N_x,i-1}^k + W_{N_x-2,i-1}^k).
\end{aligned}$$

Usando a condição de fronteira (3.16), (3.24)

$$\begin{aligned}
& W_{N_x-1,i-1}^{k+1} \times (-P6_{N_x-1,i} + P4_{N_x-1,i}) + W_{N_x-1,i}^{k+1} \times (P1_{N_x-1,i} + P5_{N_x-1,i}) \\
& + W_{N_x-1,i+1}^{k+1} \times (P6_{N_x-1,i} + P3_{N_x-1,i}) + P2_{N_x-1,i}W_{N_x-2,i}^{k+1} + P6_{N_x-1,i} \times \\
& (W_{N_x-2,i-1}^{k+1} - W_{N_x-2,i+1}^{k+1}) = -W_{N_x-1,i-1}^k \times (-P6_{N_x-1,i} + P4_{N_x-1,i}) - W_{N_x-1,i}^k \times \\
& (P1_{N_x-1,i} + (P5_{N_x-1,i} - 2 + r \times h)) - W_{N_x-1,i+1}^k \times (P6_{N_x-1,i} + P3_{N_x-1,i}) \\
& - P2_{N_x-1,i}W_{N_x-2,i}^k - P6_{N_x-1,i} \times (W_{N_x-2,i-1}^k - W_{N_x-2,i+1}^k).
\end{aligned}$$

Devido às modificações anteriores é necessário que a matriz M seja alterada para o conjunto de valores de entrada $j = N_x - 1$ e $1 \leq i \leq N_v - 1$ (o último elemento de cada sub-coluna de W).

Para $i = N_v - 1$, a equação (3.9) produz:

$$\begin{aligned}
& P1_{j,N_v-1}W_{j+1,N_v-1}^{k+1} + P2_{j,N_v-1}W_{j-1,N_v-1}^{k+1} + P3_{j,N_v-1}W_{j,N_v}^{k+1} + P4_{j,N_v-1}W_{j,N_v-2}^{k+1} \\
& + P5_{j,N_v-1}W_{j,N_v-1}^{k+1} + P6_{j,N_v-1} \times (W_{j+1,N_v}^{k+1} - W_{j-1,N_v}^{k+1} - W_{j+1,N_v-2}^{k+1} \\
& + W_{j-1,N_v-2}^{k+1}) = -P1_{j,N_v-1}W_{j+1,N_v-1}^k - P2_{j,N_v-1}W_{j-1,N_v-1}^k - P3_{j,N_v-1}W_{j,N_v}^k \\
& - P4_{j,N_v-1}W_{j,N_v-2}^k - (P5_{j,N_v-1} - 2 + r \times h)W_{j,N_v-1}^k - P6_{j,N_v-1} \times (W_{j+1,N_v}^k \\
& - W_{j-1,N_v}^k - W_{j+1,N_v-2}^k + W_{j-1,N_v-2}^k).
\end{aligned}$$

Usando a condição de fronteira (3.20), (3.25)

$$\begin{aligned}
& W_{j,N_v-1}^{k+1} \times (P3_{j,N_v-1} + P5_{j,N_v-1}) + W_{j-1,N_v-1}^{k+1} \times (P2_{j,N_v-1} - P6_{j,N_v-1}) \\
& + W_{j+1,N_v-1}^{k+1} \times (P1_{j,N_v-1} + P6_{j,N_v-1}) + P4_{j,N_v-1}W_{j,N_v-2}^{k+1} + P6_{j,N_v-1} \times \\
& (W_{j-1,N_v-2}^{k+1} - W_{j+1,N_v-2}^{k+1}) = -W_{j,N_v-1}^k \times (P3_{j,N_v-1} + (P5_{j,N_v-1} - 2 + r \times h)) \\
& - W_{j-1,N_v-1}^k \times (P2_{j,N_v-1} - P6_{j,N_v-1}) - W_{j+1,N_v-1}^k \times (P1_{j,N_v-1} + P6_{j,N_v-1}) \\
& - P4_{j,N_v-1}W_{j,N_v-2}^k - P6_{j,N_v-1} \times (W_{j-1,N_v-2}^k - W_{j+1,N_v-2}^k).
\end{aligned}$$

Devido às modificações anteriores é necessário que a matriz M seja alterada para o conjunto de valores de entrada $i = N_v - 1$ e $-N_x + 1 \leq j \leq N_x - 1$ (a última sub-coluna de W).

Para $i = 1$, a equação (3.9) produz:

$$\begin{aligned}
& P1_{j,1}W_{j+1,1}^{k+1} + P2_{j,1}W_{j-1,1}^{k+1} + P3_{j,1}W_{j,2}^{k+1} + P4_{j,1}W_{j,0}^{k+1} + P5_{j,1}W_{j,1}^{k+1} + P6_{j,1} \times \\
& (W_{j+1,2}^{k+1} - W_{j-1,2}^{k+1} - W_{j+1,0}^{k+1} + W_{j-1,0}^{k+1}) = -P1_{j,1}W_{j+1,1}^k - P2_{j,1}W_{j-1,1}^k - P3_{j,1}W_{j,2}^k \\
& - P4_{j,1}W_{j,0}^k - (P5_{j,1} - 2 + r \times h)W_{j,1}^k - P6_{j,1} \times (W_{j+1,2}^k - W_{j-1,2}^k - W_{j+1,0}^k \\
& + W_{j-1,0}^k).
\end{aligned}$$

Usando o processo descrito na equação (3.18),

$$\begin{aligned}
& W_{j-1,1}^{k+1} \times (P6_{j,1}Q^{-1}h \times \frac{\kappa\theta}{2m} + P2_{j,1}) + W_{j,1}^{k+1} \times (P4_{j,1}Q^{-1}h \times \frac{\kappa\theta}{2m} + P5_{j,1}) \\
& + W_{j+1,1}^{k+1} \times (-P6_{j,1}Q^{-1}h \times \frac{\kappa\theta}{2m} + P1_{j,1}) + P3_{j,1}W_{j,2}^{k+1} + P6_{j,1} \times (W_{j+1,2}^{k+1} \\
& - W_{j-1,2}^{k+1}) = -P4_{j,1} \times [Q^{-1} \times (Q1W_{j,0}^k + h \times \frac{\kappa\theta}{2m}W_{j,1}^k)] + P6_{j,1}[Q^{-1} \times \\
& (Q1W_{j+1,0}^k + h \times \frac{\kappa\theta}{2m}W_{j+1,1}^k)] - P6_{j,1}[Q^{-1} \times (Q1W_{j-1,0}^k + h \times \frac{\kappa\theta}{2m}W_{j-1,1}^k)] \quad (3.26) \\
& - P1_{j,1}W_{j+1,1}^k - P2_{j,1}W_{j-1,1}^k - P3_{j,1}W_{j,2}^k - P4_{j,1}W_{j,0}^k - (P5_{j,1} - 2 + r \times h)W_{j,1}^k \\
& - P6_{j,1} \times (W_{j+1,2}^k - W_{j-1,2}^k - W_{j+1,0}^k + W_{j-1,0}^k) \\
& \Leftrightarrow W_{j-1,1}^{k+1} \times (P6_{j,1}Q^{-1}h \times \frac{\kappa\theta}{2m} + P2_{j,1}) + W_{j,1}^{k+1} \times (P4_{j,1}Q^{-1}h \times \frac{\kappa\theta}{2m} + P5_{j,1}) \\
& + W_{j+1,1}^{k+1} \times (-P6_{j,1}Q^{-1}h \times \frac{\kappa\theta}{2m} + P1_{j,1}) + P3_{j,1}W_{j,2}^{k+1} + P6_{j,1} \times (W_{j+1,2}^{k+1} \\
& - W_{j-1,2}^{k+1}) = -W_{j-1,1}^k \times (P6_{j,1}Q^{-1}h \times \frac{\kappa\theta}{2m} + P2_{j,1}) - W_{j,1}^k \times (P4_{j,1}Q^{-1}h \\
& \times \frac{\kappa\theta}{2m} + (P5_{j,1} - 2 + r \times h)) - W_{j+1,1}^k \times (-P6_{j,1}Q^{-1}h \times \frac{\kappa\theta}{2m} + P1_{j,1}) - P3_{j,1}W_{j,2}^k \\
& - P6_{j,1} \times (W_{j+1,2}^k - W_{j-1,2}^k) + W_{j-1,0}^k \times (-P6_{j,1} \times (Q^{-1} \times Q_1 + 1)) + W_{j,0}^k \times \\
& (-P4_{j,1} \times (Q^{-1} \times Q_1 + 1)) + W_{j+1,0}^k \times (P6_{j,1} \times (Q^{-1} \times Q_1 + 1)).
\end{aligned}$$

Devido às modificações anteriores é necessário que a matriz M seja alterada para o conjunto de valores de entrada $i = 1$ e $-N_x + 1 \leq j \leq N_x - 1$ (a primeira sub-coluna de W) e é necessário também ser adicionado no lado direito do problema principal (equação (3.11)) uma outra matriz V , para as mesmas entradas que contemple os últimos três termos da equação (quando $i = 0$).

Com as alterações introduzidas pelas condições de fronteira, o processo descrito na equação (3.11) é reescrito como

$$M \cdot W^{k+1} = D \cdot W^k + S + V, \quad (3.27)$$

com as matrizes M e D alteradas.

4. Análise do esquema de diferenças finitas

Quando se utilizam métodos numéricos, como foi o caso, onde as derivadas da EDP de Heston foram substituídas por diferenças, criando uma equação de diferenças finitas (EDF), um erro é introduzido no sentido em que a EDF não satisfaz a solução exata da EDP precisamente.

Um dos desafios comuns aos métodos numéricos é o de encontrar a estabilidade e a convergência do método.

Por isso, antes de utilizarmos e validarmos os resultados obtidos através do método, é necessário testá-lo quanto à sua estabilidade, convergência e ordem de erro.

Para efeitos de teste são utilizados valores de uma opção Europeia, ou seja, sem a condição de exercício antecipado, requisito para a opção Americana. Isto é, se a opção Europeia for estável e convergente, a introdução dessa condição é imediata não interferindo com a estabilidade e convergência.

Os parâmetros utilizados, encontram-se nas tabelas 4.1 e 4.2:

Parâmetros do Modelo	
Taxa de juro sem risco (r)	0.05
Taxa de dividendos (q)	0
Velocidade de reversão para a média (κ)	3
Média de longo prazo da variância instantânea (θ)	0.04
Volatilidade do processo de variância (σ)	0.1
Correlação (ρ)	-0.1
Strike (K)	100
Maturidade da opção em anos (T)	0.08333

Tabela 4.1.: Parâmetros do Modelo

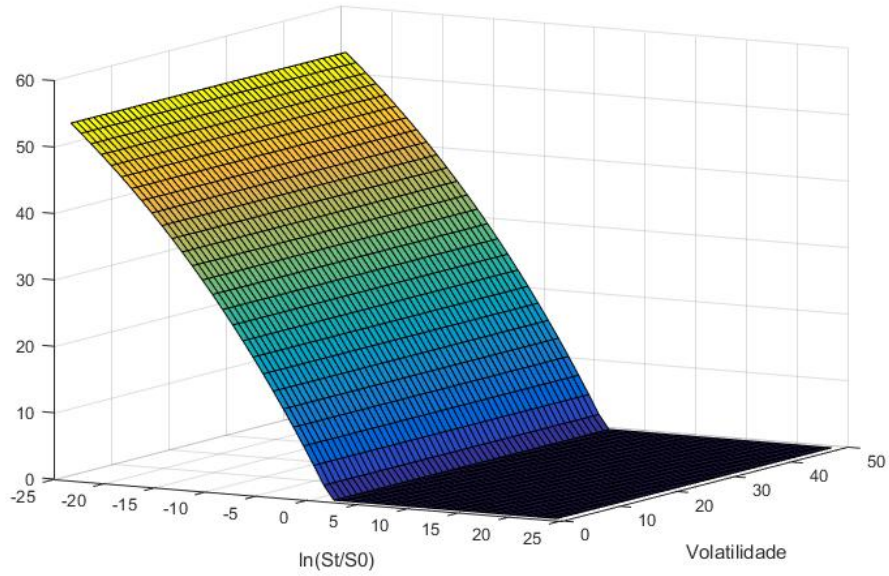
Parâmetros do Método	
Preço do ativo subjacente máximo ($S_{máx}$)	200
Valor da volatilidade máximo ($V_{máx}$)	1
Número de step's do τ (N)	100
Números de step's na direção do x ($2N_x$)	50
Número de step's na direção de v (N_v)	50

Tabela 4.2.: Parâmetros do Método

4.1. Estabilidade

Um esquema de diferenças finitas diz-se estável, se para um h , l e m (*step's*) os erros (por exemplo: truncagem, aproximação) não se propagam à medida que o método progride através do tempo. Ou seja, se um método numérico é estável, quaisquer erros ou perturbações na solução não são amplificados sem limite, o que perfaz que o conceito de estabilidade esteja relacionado com o crescimento de erros introduzidos nos cálculos.

Uma maneira prática de evitar a propagação desses erros nos cálculos é utilizar um critério de estabilidade, verificando se o método é estável ou não. Grande parte da literatura usa a teoria de Von Neumann para provar a estabilidade de esquemas de diferença finita (Tavella [2000] [19]). A abordagem de Von Neumann é válida apenas para problemas de valores iniciais lineares e de coeficientes constantes, o que não é o caso da equação de Heston. Este fato não é problemático porque o método utilizado (Crank-Nicolson) tem a particularidade de ser incondicionalmente estável (Duff [2002] [8]), não precisando de qualquer critério. Esta particularidade acomoda que para qualquer escolha de h o método continue atraente do ponto de vista das suas propriedades de estabilidade, como veremos nos gráficos seguintes.



(a) $x_t = \ln(\frac{S_t}{S_0})$; $S_0 = 95$

Figura 4.1.: Payoff da *put* Europeia.

A Figura 4.1 mostra-nos os valores da opção na sua maturidade (payoff), sendo estes os valores utilizados para inicializar o método, em $\tau = 0$.

Na Figura 4.1 os resultados estão condizentes com o que se está a avaliar, a *put* Europeia. Para valores de *spot* muito baixos (perto de 0), o valor da opção está no seu valor máximo, que deveria ser o seu *strike* ($K = 100$), e à medida que o preço do ativo aumenta, o valor vai diminuindo até chegar ao seu valor mínimo de 0, quando $S_t \geq 100$. Ao observar a Figura 4.1 nota-se claramente que o valor máximo para a *put* não é o seu *strike*, como à partida deveria ser. Tal acontece devido à simplificação mencionada em (3.1), quando o preço do ativo atinge valores perto de 0 ele é multiplicado pelo seu valor inicial S_0 , o que faz com que o payoff nesse ponto seja mais baixo que o *strike* (neste caso e com os valores utilizados é de 53.51¹ em vez de 100.).

É de esperar que os valores finais do método se assemelhem a estes.

¹ $S_t = 95 \times e^{-24 \cdot l}$; com $l = 0.029777$; payoff = $100 - 46.49$.

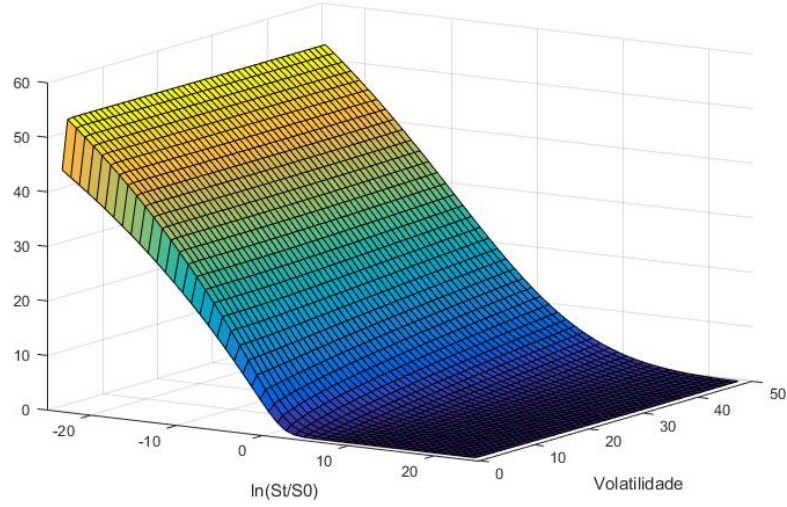


Figura 4.2.: Avaliação da *put* Europeia com $\tau = 0.08333$; $N = 100$.

Como mostra a figura 4.2 o resultado do preço gerado pelo método é em tudo similar ao da Figura 4.1, não violando as restrições do valor máximo da put (53.06) e que o seu valor não pode ser negativo.

Para o valor de $N = 100$ e $h = 8.333 \times 10^{-4}$, o valor do preço da opção de venda (*put*) presente na Figura 4.2 alcançou estabilidade em toda a malha, completando assim uma condição necessária para utilizar o método.

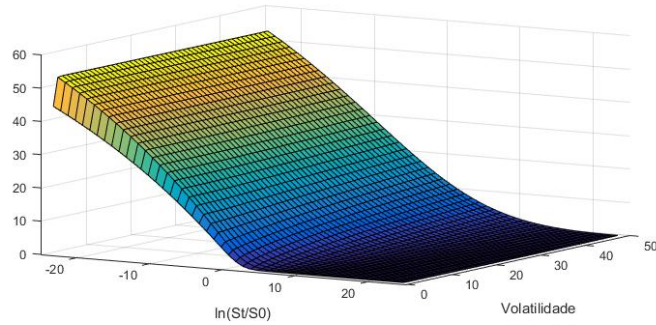


Figura 4.3.: Avaliação da *put* Europeia com $N = 10$.

Na Figura 4.3 é verificado que a estabilidade do método também é adquirida para $N = 10$, o que confirma que o método é estável para diferentes valores de h .

4.2. Convergência

A convergência de um método numérico é extremamente importante do ponto de vista prático, pois espera-se que a solução numérica (aproximada) calculada reproduza de maneira mais fiel possível a solução analítica do problema (exata). Diz-se então que um esquema de diferenças finitas é convergente se a solução das equações de diferenças finitas se aproxima da solução exata da equação diferencial parcial (EDP), quando h , l e m (step's) $\rightarrow 0$.

Denotaremos por $V = V(\tau, x, v)$ a solução exata do problema e por $W = W_{j,i}^k$ a solução aproximada pelo esquema de diferenças finitas. De repara-se que a solução exata V está definida para todos os pontos do domínio $[-X, X] \times [0, V] \times [0, \tau]$, enquanto que a solução aproximada só existe em pontos da malha. Logo a solução numérica deverá aproximar-se da solução analítica em cada ponto (τ, x, v) do domínio, quando l , m e h tendem para zero, com $x = j \times l$, $v = i \times m$ e $\tau = k \times h$. Os gráficos seguintes são obtidos com os parâmetros das Tabelas 4.1 e 4.2.

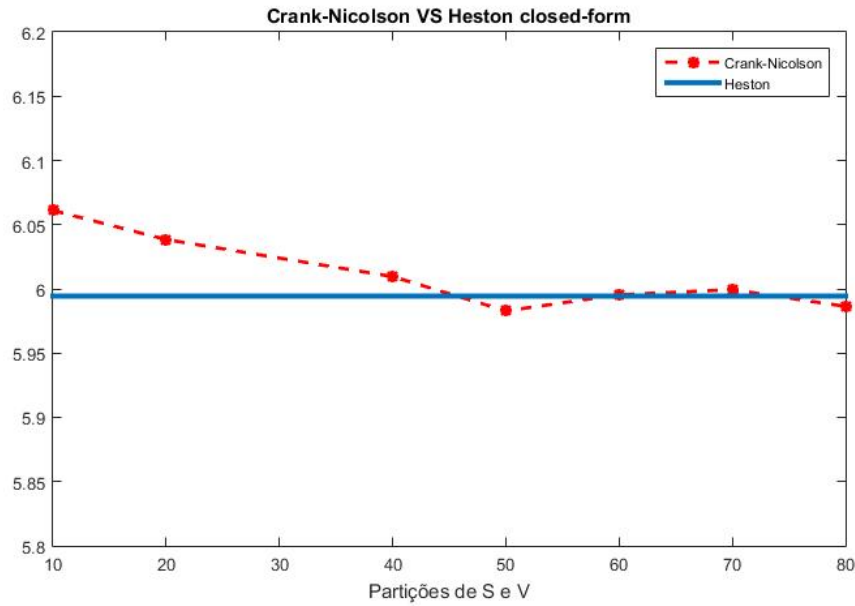


Figura 4.4.: $S_0 = 105$ e $v_0 = 0.04$.

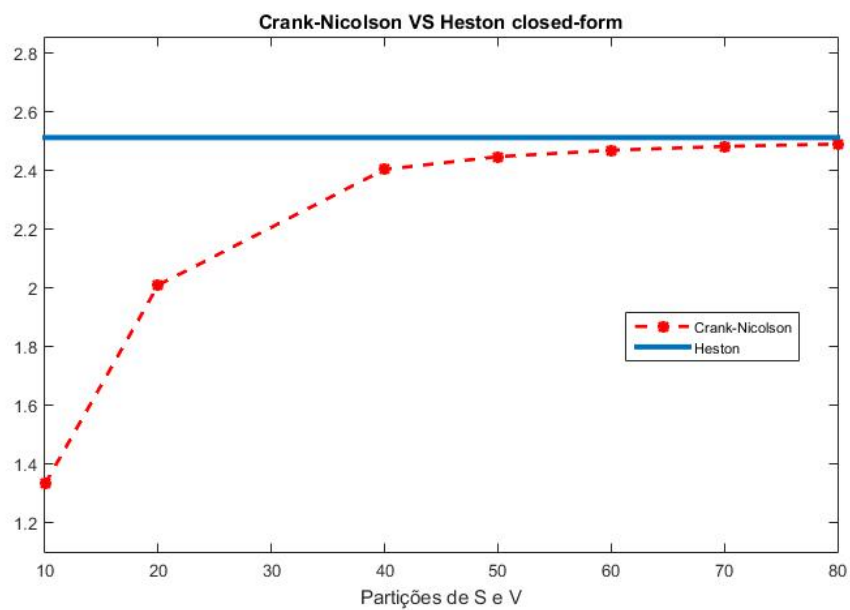


Figura 4.5.: $S_0 = 100$ e $v_0 = 0.04$.

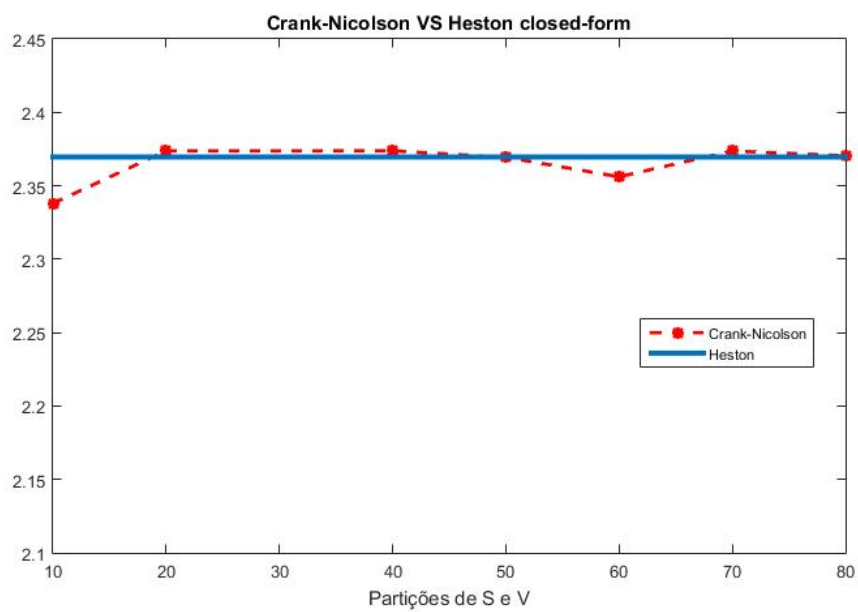


Figura 4.6.: $S_0 = 95$ e $v_0 = 0.16$.

Nas Figuras 4.4, 4.5 e 4.5 são usados diferentes valores de *spot* e volatilidade, nomeadamente 105, 100, 95 para o *spot* e 0.04 e 0.16 para a volatilidade, e está-se a avaliar uma opção de compra europeia (*Call*). Observa-se que, para esses diferentes valores a solução aproximada tende a aproximar a solução exata, que é obtida através da fórmula fechada de Heston, à medida que se aumentam as partições de S e v . Portanto para valores de $l, m \rightarrow 0$ a solução calculada pelo método de Crank-Nicolson tende a ser a exata, confirmando a convergência do método, outra condição necessária para a sua utilização futura.

4.3. Erro de truncamento

O erro de truncamento está presente em qualquer método numérico. Surge cada vez que se substitui um processo matemático infinito por um processo finito ou discreto. Nesta secção será implementada a expressão para o erro de truncamento do esquema utilizado. Para o efeito, começa-se pela expansão de Taylor sobre os pontos (τ_k, x_j, v_i) , para chegar às expressões (3.5). Depois substitui-se essas aproximações em (3.2).

Começamos por expandir os pontos em τ_k :

$$\begin{aligned}
 W(\tau_{k+\frac{1}{2}+\frac{h}{2}}, x_j, v_i) &\approx W(\tau_{k+\frac{1}{2}}, x_j, v_i) + \frac{h}{2} \frac{\partial W(\tau_{k+\frac{1}{2}}, x_j, v_i)}{\partial \tau} + \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 W(\tau_{k+\frac{1}{2}}, x_j, v_i)}{\partial \tau^2} \\
 &+ \frac{h^3}{48} \frac{\partial^3 W(\zeta_1, x_j, v_i)}{\partial \tau^3}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

e

$$\begin{aligned}
 W(\tau_{k+\frac{1}{2}-\frac{h}{2}}, x_j, v_i) &\approx W(\tau_{k+\frac{1}{2}}, x_j, v_i) - \frac{h}{2} \frac{\partial W(\tau_{k+\frac{1}{2}}, x_j, v_i)}{\partial \tau} + \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 W(\tau_{k+\frac{1}{2}}, x_j, v_i)}{\partial \tau^2} \\
 &- \frac{h^3}{48} \frac{\partial^3 W(\zeta_2, x_j, v_i)}{\partial \tau^3}.
 \end{aligned}$$

Recorrendo à subtracção e isolando a derivada de primeira ordem ao tempo, chegamos à aproximação referida em (3.5), com o respetivo erro:

$$\begin{aligned}
 W(\tau_{k+\frac{1}{2}+\frac{h}{2}}, x_j, v_i) - W(\tau_{k+\frac{1}{2}-\frac{h}{2}}, x_j, v_i) &\approx h \frac{\partial W(\tau_{k+\frac{1}{2}}, x_j, v_i)}{\partial \tau} + \frac{h^3}{24} \frac{\partial^3 W(\zeta, x_j, v_i)}{\partial \tau^3} \\
 \Leftrightarrow \frac{W(\tau_{k+1}, x_j, v_i) - W(\tau_k, x_j, v_i)}{h} &\approx \frac{\partial W(\tau_{k+\frac{1}{2}}, x_j, v_i)}{\partial \tau} + \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3 W(\zeta, x_j, v_i)}{\partial \tau^3} \\
 \Leftrightarrow \frac{W_{j,i}^{k+1} - W_{j,i}^k}{h} &\approx \frac{\partial W}{\partial \tau}(\tau_k, x_j, v_i) + \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3 W}{\partial \tau^3}(\zeta, x_j, v_i)^2.
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

²Com $\zeta \in [\tau_k; \tau_{k+1}]$.

De seguida expandimos os pontos em x_j , nomeadamente para x_{j+1} e x_{j-1} .

Para aproximar a primeira derivada:

$$W(\tau_k, x_{j+1}, v_i) \approx W(\tau_k, x_j, v_i) + l \frac{\partial W(\tau_k, x_j, v_i)}{\partial x} + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 W(\tau_k, x_j, v_i)}{\partial x^2} + \frac{l^3}{6} \frac{\partial^3 W(\tau_k, \zeta_1, v_i)}{\partial x^3}$$

e

$$W(\tau_k, x_{j-1}, v_i) \approx W(\tau_k, x_j, v_i) - l \frac{\partial W(\tau_k, x_j, v_i)}{\partial x} + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 W(\tau_k, x_j, v_i)}{\partial x^2} - \frac{l^3}{6} \frac{\partial^3 W(\tau_k, \zeta_2, v_i)}{\partial x^3}.$$

Para aproximar a segunda derivada:

$$W(\tau_k, x_{j+1}, v_i) \approx W(\tau_k, x_j, v_i) + l \frac{\partial W(\tau_k, x_j, v_i)}{\partial x} + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 W(\tau_k, x_j, v_i)}{\partial x^2} + \frac{l^3}{6} \frac{\partial^3 W(\tau_k, \zeta_1, v_i)}{\partial x^3} + \frac{l^4}{24} \frac{\partial^4 W(\tau_k, \zeta_1, v_i)}{\partial x^4}$$

e

$$W(\tau_k, x_{j-1}, v_i) \approx W(\tau_k, x_j, v_i) - l \frac{\partial W(\tau_k, x_j, v_i)}{\partial x} + \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 W(\tau_k, x_j, v_i)}{\partial x^2} - \frac{l^3}{6} \frac{\partial^3 W(\tau_k, \zeta_2, v_i)}{\partial x^3} + \frac{l^4}{24} \frac{\partial^4 W(\tau_k, \zeta_2, v_i)}{\partial x^4}.$$

(4.3)

Através da equação anterior chegamos às aproximações de primeira e segunda ordem com respeito a x no instante t_k :

$$W(\tau_k, x_{j+1}, v_i) - W(\tau_k, x_{j-1}, v_i) \approx 2l \frac{\partial W(\tau_k, x_j, v_i)}{\partial x} + \frac{l^3}{3} \frac{\partial^3 W(\tau_k, \zeta, v_i)}{\partial x^3} \\ \Leftrightarrow \frac{W_{j+1,i}^k - W_{j-1,i}^k}{2l} \approx \frac{\partial W(\tau_k, x_j, v_i)}{\partial x} + \frac{l^2}{6} \frac{\partial^3 W(\tau_k, \zeta, v_i)}{\partial x^3}$$

e

(4.4)

$$W_{j+1,i}^k + W_{j-1,i}^k \approx 2W(\tau_k, x_j, v_i) + l^2 \frac{\partial^2 W(\tau_k, x_j, v_i)}{\partial x^2} + \frac{l^4}{12} \frac{\partial^4 W(\tau_k, \zeta, v_i)}{\partial x^4} \\ \Leftrightarrow \frac{W_{j+1,i}^k - 2W_{j,i}^k + W_{j-1,i}^k}{l^2} \approx \frac{\partial^2 W(\tau_k, x_j, v_i)}{\partial x^2} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 W(\tau_k, \zeta, v_i)}{\partial x^4}.$$

No instante t_{k+1} :

$$\frac{W_{j+1,i}^{k+1} - W_{j-1,i}^{k+1}}{2l} \approx \frac{\partial W(\tau_{k+1}, x_j, v_i)}{\partial x} + \frac{l^2}{6} \frac{\partial^3 W(\tau_{k+1}, \zeta^*, v_i)}{\partial x^3}$$

e

$$\frac{W_{j+1,i}^{k+1} - 2W_{j,i}^{k+1} + W_{j-1,i}^{k+1}}{l^2} \approx \frac{\partial^2 W(\tau_{k+1}, x_j, v_i)}{\partial x^2} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 W(\tau_{k+1}, \zeta^*, v_i)}{\partial x^4}.$$
(4.5)

Através deste conjunto de equações, chegamos às aproximações de primeira e segunda ordem referentes a x presentes em (3.5), com o respectivo erro:

$$\frac{\partial W}{\partial x} \approx \frac{1}{2} \times \left[\frac{W_{j+1,i}^{k+1} - W_{j-1,i}^{k+1}}{2l} + \frac{W_{j+1,i}^k - W_{j-1,i}^k}{2l} \right] - \frac{l^2}{6} \frac{\partial^3 W(\tau, \zeta, v_i)}{\partial x^3}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \approx \frac{1}{2} \times \left[\frac{W_{j+1,i}^{k+1} - 2W_{j,i}^{k+1} + W_{j-1,i}^{k+1}}{l^2} + \frac{W_{j+1,i}^k - 2W_{j,i}^k + W_{j-1,i}^k}{l^2} \right] - \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 W(\tau, \zeta, v_i)}{\partial x^4}.$$
(4.6)

Observa-se que para cada passo de tempo (τ_k e τ_{k+1}) a aproximação às derivadas processa-se da mesma maneira e o erro produzido é o mesmo. Por isso de aqui em diante, por questões de simplificação considerar-se-á o tempo somente como τ .

Usando o mesmo procedimento que em (4.3), mas agora para os pontos em v_i , substituindo o l por m e as derivadas parciais ∂x por ∂v , chegamos também às aproximações de primeira e segunda ordem com respeito a v :

$$W(\tau, x_j, v_{i+1}) - W(\tau, x_j, v_{i-1}) \approx 2m \frac{\partial W(\tau, x_j, v_i)}{\partial v} + \frac{m^3}{3} \frac{\partial^3 W(\tau, x_j, \zeta)}{\partial v^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{W(\tau, x_j, v_{i+1}) - W(\tau, x_j, v_{i-1})}{2m} \approx \frac{\partial W(\tau, x_j, v_i)}{\partial v} + \frac{m^2}{6} \frac{\partial^3 W(\tau, x_j, \zeta)}{\partial v^3}$$
(4.7)

e

$$\begin{aligned}
W(\tau, x_j, v_{i+1}) + W(\tau, x_j, v_{i-1}) &\approx 2W(\tau, x_j, v_i) + m^2 \frac{\partial^2 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial v^2} + \frac{m^4}{12} \frac{\partial^4 W(\tau, x_j, \zeta)}{\partial v^4} \\
&\Leftrightarrow \frac{W(\tau, x_j, v_{i+1}) - 2W(\tau, x_j, v_i) + W(\tau, x_j, v_{i-1})}{m^2} \approx \frac{\partial^2 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial v^2} + \frac{m^2}{12} \frac{\partial^4 W(\tau, x_j, \zeta)}{\partial v^4}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

A última derivada é a derivada mista entre x e v , a qual expandimos em:

$$\begin{aligned}
W(\tau, x_{j+1}, v_{i+1}) &\approx W(\tau, x_j, v_i) + l \frac{\partial W(\tau, x_j, v_i)}{\partial x} + m \frac{\partial W(\tau, x_j, v_i)}{\partial v} + \frac{1}{2} \times \\
&[l^2 \frac{\partial^2 W(\tau, x_j, v_i)}{x^2} + m^2 \frac{\partial^2 W(\tau, x_j, v_i)}{v^2} + 2ml \frac{\partial^2 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial vx}] + \frac{1}{6} \times [l^3 \frac{\partial^3 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial x^3} \\
&+ m^3 \frac{\partial^3 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial v^3} + 3l^2 m \frac{\partial^3 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial x^2 v} + 3lm^2 \frac{\partial^3 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial xv^2}] + \frac{1}{24} \times \\
&[l^4 \frac{\partial^4 W(\tau, \zeta_1, v_i)}{\partial x^4} + m^4 \frac{\partial^4 W(\tau, x_j, \zeta_1)}{\partial v^4} + 4l^3 m \frac{\partial^4 W(\tau, \zeta_1, \zeta_1)}{\partial x^3 v} + 4lm^3 \frac{\partial^4 W(\tau, \zeta_1, \zeta_1)}{\partial xv^3} \\
&+ 6l^2 m^2 \frac{\partial^4 W(\tau, \zeta_1, \zeta_1)}{\partial x^2 v^2}]
\end{aligned} \tag{4.9}$$

e

$$\begin{aligned}
W(\tau, x_{j-1}, v_{i+1}) &\approx W(\tau, x_j, v_i) - l \frac{\partial W(\tau, x_j, v_i)}{\partial x} + m \frac{\partial W(\tau, x_j, v_i)}{\partial v} + \frac{1}{2} \times \\
&[l^2 \frac{\partial^2 W(\tau, x_j, v_i)}{x^2} + m^2 \frac{\partial^2 W(\tau, x_j, v_i)}{v^2} - 2ml \frac{\partial^2 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial vx}] + \frac{1}{6} \times [-l^3 \frac{\partial^3 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial x^3} \\
&+ m^3 \frac{\partial^3 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial v^3} + 3l^2 m \frac{\partial^3 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial x^2 v} - 3lm^2 \frac{\partial^3 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial xv^2}] + \frac{1}{24} \times \\
&[l^4 \frac{\partial^4 W(\tau, \zeta_2, v_i)}{\partial x^4} + m^4 \frac{\partial^4 W(\tau, x_j, \zeta_2)}{\partial v^4} - 4l^3 m \frac{\partial^4 W(\tau, \zeta_2, \zeta_2)}{\partial x^3 v} - 4lm^3 \frac{\partial^4 W(\tau, \zeta_2, \zeta_2)}{\partial xv^3} \\
&+ 6l^2 m^2 \frac{\partial^4 W(\tau, \zeta_2, \zeta_2)}{\partial x^2 v^2}].
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Considerando primeiro a operação $W(\tau, x_{j+1}, v_{i+1}) - W(\tau, x_{j-1}, v_{i+1})$, verifica-se que os termos com sinais diferentes referem-se aos que têm potência de l ímpar ($l^{\text{ímpar}}$), todos os outros termos acabam por se anular por terem o mesmo sinal. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
W(\tau, x_{j+1}, v_{i+1}) - W(\tau, x_{j-1}, v_{i+1}) &\approx 2W(\tau, x_j, v_i) + 2l \frac{\partial W(\tau, x_j, v_i)}{\partial x} \\
&+ 2ml \frac{\partial^2 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial x \partial v} + \frac{l^3}{3} \frac{\partial^3 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial x^3} + lm^2 \frac{\partial^3 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial x v^2} + \frac{lm^3}{3} \frac{\partial^4 W(\tau, \zeta, \zeta)}{\partial x^3 v} \\
&+ \frac{lm^3}{3} \frac{\partial^4 W(\tau, \zeta, \zeta)}{\partial x v^3}. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

A operação $W(\tau, x_{j-1}, v_{i-1}) - W(\tau, x_{j+1}, v_{i-1})$ é em tudo semelhante à operação anterior, tendo todos os termos com potência de l ímpar, com a diferença de sinal nos termos com $l^{\text{ímpar}}$ e m^{par} . A soma destas duas operações resultará na aproximação da derivada mista de x e v e do respectivo erro:

$$\begin{aligned}
&W(\tau, x_{j+1}, v_{i+1}) - W(\tau, x_{j-1}, v_{i+1}) - W(\tau, x_{j+1}, v_{i-1}) + W(\tau, x_{j-1}, v_{i-1}) \\
&\approx 4lm \frac{\partial^2 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial x v} + \frac{2l^3 m}{3} \frac{\partial^4 W(\tau, \zeta, \zeta)}{\partial x^3 v} + \frac{2lm^3}{3} \frac{\partial^4 W(\tau, \zeta, \zeta)}{\partial x v^3} \\
&\Leftrightarrow \frac{W(\tau, x_{j+1}, v_{i+1}) - W(\tau, x_{j-1}, v_{i+1}) - W(\tau, x_{j+1}, v_{i-1}) + W(\tau, x_{j-1}, v_{i-1})}{4lm} \\
&\approx \frac{\partial^2 W(\tau, x_j, v_i)}{\partial x v} + \frac{1}{6} \times [l^2 \frac{\partial^4 W(\tau, \zeta, \zeta)}{\partial x^3 v} + m^2 \frac{\partial^4 W(\tau, \zeta, \zeta)}{\partial x v^3}]. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Depois de deduzido o erro para as aproximações às diferenças finitas utilizadas, o erro de truncamento para o esquema de Crank-Nicolson sai da substituição desse erro na EDP (3.2):

$$\begin{aligned}
e_{j,i}^k = & \frac{h^2}{24} \frac{\partial^3 W_{j,i}^k}{\partial \tau^3} - (r - q - \frac{1}{2}v_t) \frac{l^2}{6} \frac{\partial^3 W_{j,i}^k}{\partial x^3} - \kappa(\theta - v_t) \frac{m^2}{6} \frac{\partial^3 W_{j,i}^k}{\partial v^3} \\
& - \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 W_{j,i}^k}{\partial x^4} - \sigma^2 \frac{1}{2} v_t \frac{m^2}{12} \frac{\partial^4 W_{j,i}^k}{\partial v^4} - \rho \sigma v_t \frac{1}{6} \times [l^2 \frac{\partial^4 W_{j,i}^k}{\partial x^3 v} + m^2 \frac{\partial^4 W_{j,i}^k}{\partial x v^3}],
\end{aligned} \tag{4.13}$$

o que significa que este esquema numérico é de segunda ordem em ambas as dimensões do espaço e no tempo.

5. Opções Americanas

5.1. Algoritmo de Brennan e Schwartz (1977)

O método analisado e descrito até agora, produz resultados que satisfazem o preço para as opções Europeias, não incorporando por isso a particularidade do exercício antecipado que define as opções Americanas. Nesse âmbito, nesta tese será aplicado o algoritmo de Brennan e Schwartz (1977) [4].

O algoritmo consiste em resolver o processo descrito em (3.27), obtendo os valores para a primeira iteração de tempo ($W_{j,i}^1$). Tendo esses valores calculados, se a desigualdade $W_{j,i}^1 < W_{j,i}^0$ for verificada, obrigamos a que $W_{j,i}^1 = W_{j,i}^0$ e resolvemos o processo para a segunda iteração. Se por outro lado a condição contrária acontecer, $W_{j,i}^1 > W_{j,i}^0$, o processo evolui sem qualquer alteração. Este mecanismo é executado deste $k = 0$ até $k = N - 1$.

Utilizamos este algoritmo porque é pouco dispendioso e de fácil execução e implementação quando programado em *Matlab*, podendo ser compreendido e executado através da equação:

$$W_{j,i}^{k+1} = \max(W_{j,i}^{k+1}; e^{r \times (k+1) \times h} \times W_{j,i}^0), \quad (5.1)$$

para $j = -N_x + 1, \dots, 0, \dots, N_x - 1$, $i = 1, \dots, N_v - 1$ e $k = 0, \dots, N - 1$.

Esta equação verifica o sistema resolvido e força-o a ser viável, com os valores de $W_{j,i}^{k+1}$ a serem calculados pelo processo (3.27) e $W_{j,i}^0$ a condição inicial do método.

5.2. Estabilidade e Convergência

Depois de aplicado o algoritmo de Brennan e Schwartz, o método já fornece valores para o preço das opções Americanas, e como tal antes de utilizar o método é necessário confirmar se o método continua com resultados estáveis e convergentes.

Para o efeito, são usados os parâmetros presentes nas Tabelas 4.1 e 4.2.

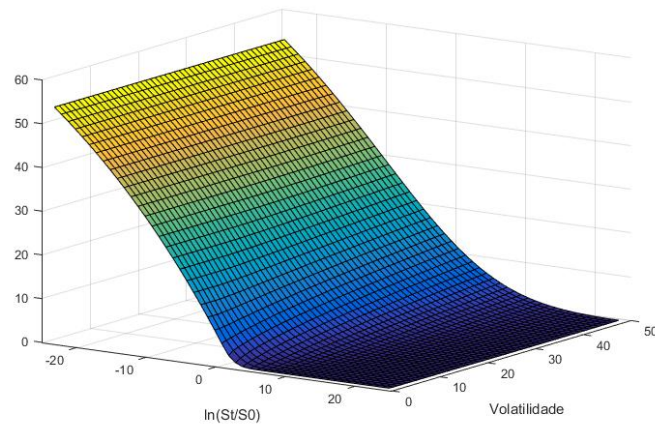


Figura 5.1.: Avaliação da *put* Americana com $\tau = 0.08333$ e $N = 100$.

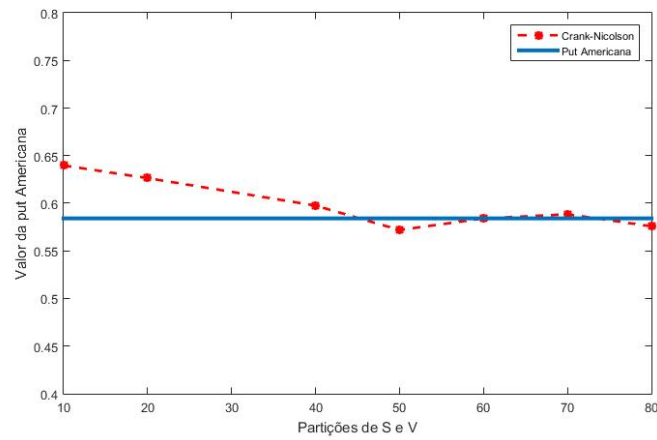


Figura 5.2.: $S_0 = 105$, $v_0 = 0.04$ e $\tau = 0.25$.

Como seria de esperar, as Figuras 5.1 e 5.2 mostram que o método continua estável e convergente.

6. Resultados

Para verificar se os resultados obtidos para o preço das opções de venda Americanas são válidos e fiáveis (boas aproximações) é necessário compará-los com resultados comprovados. Para esse fim, nesta tese serão utilizados os resultados provenientes do método de geração de árvores de caminho independente usando o modelo de volatilidade estocástica de Heston (1993) de Beliaeva e Nawalkha (2010).

6.1. O método de Beliaeva e Nawalkha (2010)

Beliaeva e Nawalkha (2010) [2] apresentam uma teoria simples para a geração de árvores independentes de caminho para a avaliação de opções Americanas sob modelos de volatilidade estocástica de baixa dimensão. A abordagem por detrás desta teoria é que em geral o processo dos preços e o processo da volatilidade descritos em (2.1) e (2.4) devem ser modelados por duas árvores correlacionadas sob o mesmo modelo de volatilidade estocástica. Isto implica que o termo de correlação deve fazer parte da probabilidade conjunta. Infelizmente, a adição da correlação leva a probabilidades conjuntas negativas sempre que o processo do preço e da volatilidade são modelados por duas árvores independentes de caminho. Probabilidades negativas resultam também quando o processo de volatilidade chega a zero, com modelos de volatilidade estocástica que permitem zero como limite attingível para o processo. Para remover essas probabilidades, Beliaeva e Nawalkha (2008) [1] desenvolveram uma transformação multidimensional para um conjunto de modelos de volatilidade estocástica de baixa dimensão. A transformação para o caso específico de Heston é definida pela equação seguinte:

$$\begin{aligned} y_t &= \ln(S_t) - \frac{\rho}{\sigma} v_t - h_t, \quad \text{e} \\ h_t &= \left(r - \frac{\rho\kappa\theta}{\sigma}\right) \times t. \end{aligned} \tag{6.1}$$

A transformação consiste em três termos. O primeiro é a transformação do preço pelo log do mesmo. O segundo termo permite que o processo transformado y_t se torne condicionalmente independente do processo v_t , removendo a necessidade de modelar a correlação entre as árvores de y_t e v_t , e com isso evitando a questão de probabilidades conjuntas negativas. O terceiro termo é o termo determinístico definido em função do tempo, que apropriadamente especificado permite que a probabilidade do processo y_t permaneça não negativa, quando v_t chega a zero. De seguida são geradas duas árvores independentes para o processo de variância e para o processo y_t e posteriormente uma terceira para combiná-las numa árvore bi-dimensional.

Esta abordagem obtém valores altamente precisos para o preço de opções Americanas em frações de segundo usando o *control variate method*.

6.2. Comparação entre a performance dos dois métodos

O método de Crank-Nicolson usado para solucionar a equação de Heston foi implementado com a ajuda do programa *Matlab*, que torna as operações com matrizes e vetores bastante simples e eficazes.

Os cálculos foram realizados para uma opção de venda Americana, com *strike* $K = 100$, e maturidades dentro de 1 mês e 3 meses, para uma gama de valores iniciais de volatilidade ($v_0 = 0.04$, $v_0 = 0.09$ e $v_0 = 0.16$) e para uma gama de diferentes preços (*spot*), 95, 100, 105 e 110. Os outros parâmetros são os mesmos presentes nas Tabelas 4.1 e 4.2. O erro é calculada através da fórmula:

$$\text{Erro} = \frac{(\text{preço MDF} - \text{preço BN})}{\text{preço BN}}, \quad (6.2)$$

com o preço MDF a ser o preço obtido pelo método de diferenças finitas e o preço BN, como o preço do método de Beliaeva e Nawalkha (2010).

Os resultados são mostrados na Tabela 6.1, onde se compara a performance dos 2 métodos.

Árvore ($N = 100$)	S_0	V_0	T	MDF (Crank)	Erro
5.3518	95	0.04	0.08333	5.3503	-0.028%
2.1255	100	0.04	0.08333	2.0545	-3.41%
0.5838	105	0.04	0.08333	0.5705	-2.28%
0.1085	110	0.04	0.08333	0.1090	0.46%
7.0176	95	0.16	0.08333	7.0139	-0.05%
4.2175	100	0.16	0.08333	4.1824	-0.83%
2.3165	105	0.16	0.08333	2.3025	-0.6%
1.1629	110	0.16	0.08333	1.1539	-0.77%
6.2631	95	0.04	0.25	6.2591	-0.064%
3.4730	100	0.04	0.25	3.4265	-1.34%
1.7263	105	0.04	0.25	1.7079	-1.066%
0.7709	110	0.04	0.25	0.7644	-0.84%
9.0320	95	0.16	0.25	9.067	0.39%
6.4944	100	0.16	0.25	6.5004	0.09%
4.5353	105	0.16	0.25	4.5452	0.22%
3.0804	110	0.16	0.25	3.0876	0.23%

Tabela 6.1.: Resultados do método de Crank-Nicolson.

A Tabela 6.1, mostra-nos os resultados do método, onde a solução aproximada pelas diferenças finitas se aproxima da solução de Beliaeva e Nawalkha (2010), mas ainda com alguns erros consideráveis. Nota-se que o erro é maior para opções *out-of-the-money* (quando o $S_0 > K$) e *at-the-money* e que aumenta à medida que a maturidade da opção cresce, neste caso de 1 mês para 3 meses.

De salientar que a Tabela 6.1 não nos fornece valores comparativos para $v_0 = 0.09$. Isto tem como causa a dificuldade de escolher o número de *step's* para a dimensão do espaço (v_t) adequadas para que o método calcule o preço da opção para a volatilidade inicial. Nesta tabela é usado o valor de $N_v = 50$, e para este número de *step's* utilizado não é possível obter o valor exato da volatilidade inicial de 0.09, pelo menos mantendo os outros parâmetros constantes.

Neste âmbito e como as volatilidades iniciais para as quais estamos a calcular o valor da opção são de $0.2^2 = 0.04$, $0.3^2 = 0.09$ e $0.4^2 = 0.16$, procedemos a uma alteração na variável v_t , para $y_t = \sqrt{v_t}$. Neste caso e considerando que o valor de $Vmáx = 1$, já se evita o problema anterior e já é possível calcular o valor da opção para todas as volatilidades iniciais.

Com esta alteração a equação diferencial parcial que o método de diferenças finitas pretende satisfazer sofre alterações e passa a ser definida por:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial W}{\partial \tau} + (r - q - \frac{1}{2}y_t^2)\frac{\partial W}{\partial x_t} + (\frac{\kappa(\theta - y_t^2)}{2y_t} + \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial W}{\partial y_t} + \frac{1}{2}y_t^2\frac{\partial^2 W}{\partial x_t^2} + \frac{\sigma^2}{4}y_t\frac{\partial^2 W}{\partial y_t^2} \\
& + \frac{\rho\sigma y_t}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial x_t \partial y_t} - rW = 0.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

A modificação da EDP leva também a que as probabilidades de transição definidas em (3.10) sejam modificadas.

Na Tabela 6.2 são apresentados novos resultados provenientes do MDF, comparando-os com os resultados do *Control Variate method*. Para este efeito, avalia-se uma opção de venda Americana, com *strike* $K = 100$, e maturidades a expirar dentro de 1 mês e 3 meses. Os parâmetros do modelo são os mesmos presentes na Tabela 4.1 e como parâmetros do método escolhemos $Smáx = 200$, $Vmáx = 1$, $N = 100$ e o número de step's na direção do espaço de $50/60$.

<i>Control Variate</i> ($N = 100$)	S_0	V_0	T	MDF (Crank)	Erro
5.3516	95	0.04	0.08333	5.3542	0.048%
2.1254	100	0.04	0.08333	2.1154	-0.47%
0.5844	105	0.04	0.08333	0.5841	0.05%
0.1090	110	0.04	0.08333	0.1085	-0.45%
6.1164	95	0.09	0.08333	6.1175	0.018%
3.1604	100	0.09	0.08333	3.1327	-0.87%
1.3845	105	0.09	0.08333	1.3833	-0.087%
0.5127	110	0.09	0.08333	0.5153	0.5%
7.0146	95	0.16	0.08333	7.0171	0.03%
4.2160	100	0.16	0.08333	4.1975	-0.439%
2.3179	105	0.16	0.08333	2.3177	-0.008%
1.1667	110	0.16	0.08333	1.1680	0.11%
6.2633	95	0.04	0.25	6.2941	0.49%
3.4742	100	0.04	0.25	3.4778	0.1%
1.7285	105	0.04	0.25	1.7298	0.075%
0.7734	110	0.04	0.25	0.7711	-0.297%
7.5828	95	0.09	0.25	7.6224	0.5%
4.9449	100	0.09	0.25	4.9526	0.15%
3.0584	105	0.09	0.25	3.0687	0.33%
1.7982	110	0.09	0.25	1.8015	0.18%
9.0289	95	0.16	0.25	9.077	0.53%
6.4958	100	0.16	0.25	6.5168	0.32%
4.5416	105	0.16	0.25	4.5611	0.43%
3.0910	110	0.16	0.25	3.1015	0.34%

Tabela 6.2.: Resultados do método de Crank-Nicolson com a alteração: $y_t = \sqrt{v_t}$.

Na Tabela 6.2, os resultados obtidos através do método de Crank-Nicolson são mais precisos e sem o problema da volatilidade inicial de 0.09 presente na Tabela 6.1. Nota-se que os resultados, regra geral, diminuem em termos de precisão com o aumento da maturidade da opção e que são menos precisos para opções *at-the-money* ($S_0 = K$) e opções *out-of-the-money* para $S_0 = 110$.

Para todos os valores de parâmetros considerados, o erro permanece dentro de meio por cento da solução, tirando o erro maior quando $S_0 = 100$ e $v_0 = 0.09$ de -0.87% e a média de erro por valor testado é na ordem de 0.28% .

Para estes resultados foram usados números de *step's* para x_t e y_t de 50/60. Este fato prende-se com uma limitação do método em estudo, que faz com que existam pequenas oscilações nas soluções aproximadas à medida que o número de *step's* aumenta. Esta limitação será abordada na próxima secção.

6.3. Limitação do método de Crank-Nicolson

O método de Crank-Nicolson ganhou uma ampla aceitação na literatura financeira e é de fato um esquema de diferenças finitas comprovado para equações de uma dimensão ou duas dimensões, por se verificar preciso de segunda ordem no tempo e estável. No entanto, é conhecido que os esquemas que utilizam diferenças centralizadas no espaço e calculadas utilizando a média aritmética em t_{k+1} e t_k (como é o caso deste esquema) levam a *spurious oscillations* na solução aproximada. Sendo que essas oscilações nada têm em comum com o problema financeiro que o esquema está a aproximar.

Na Figura (4.4), podem ser observadas as oscilações, onde a solução aproximada oscila em torno da solução com o aumento das partições. Podemos reparar que o método é ligeiramente mais preciso para 60 partições do que por exemplo para 50, mas na Figura (4.6) o que acontece é precisamente o contrário, sendo mais preciso para 50 partições do que para 60, o que afeta a precisão global do método.

Em suma, Crank-Nicolson tem precisão de segunda ordem, mas as oscilações nos resultados geralmente afetam a estabilidade numérica. Por outro lado, se pensarmos em utilizar o esquema implícito estaríamos livres de oscilações, mas teríamos apenas precisão de primeira ordem, o que implicaria resultados menos precisos. Nesse sentido, a procura de soluções com o objetivo de remover as oscilações mantendo a precisão, tornam-se um caso de estudo.

Khoshghalb, Khalili e Selvadurai (2011) [14] sugeriram uma técnica generalizada, incondicionalmente estável, livre de oscilação, com precisão de segunda ordem: A *three-point finite difference technique* para a análise de equações diferenciais parciais.

Uma outra forma de eliminar as oscilações mantendo a ordem de precisão foi introduzida por Lawson e Morris (1978) [15], ao qual introduziram algoritmos (baseados numa simples extrapolação do método Backward Euler) para a resolução de equações diferenciais parciais, onde ocorreram oscilações na solução.

7. Conclusão

Nesta tese, apresentámos um método de diferenças finitas para tentar resolver de forma simples o problema associado à precificação das opções Americanas, de acordo com o modelo de Heston (1993).

Inicialmente deduzimos a EDP do modelo, segundo os processos que o definem e aplicámos o método de Crank-Nicolson para calcular os valores para opções Europeias. Depois adaptámos o método para calcular o preço de opções Americanas, utilizando para tal o algoritmo de Brennan e Schwartz (1977), não antes de analisar a eficácia do método para diferentes parâmetros. Estando o método completo e validado, procedemos à análise dos resultados obtidos. Observámos que o método fornece bons valores no geral, com os erros a variar numa gama de valores percentuais até 0.5%. No entanto, descobrimos que o método sofre de problemas de oscilação, o que faz com que a solução oscile sobre a solução real, afetando a precisão geral do método. Podíamos pensar que resolveríamos o problema encontrando o ponto médio da oscilação, mas verificámos que as oscilações não são constantes.

Num futuro trabalho, no seguimento do que aqui foi abordado e com vista a eliminar as oscilações dos resultados, poderá ser aplicado e analisado o trabalho desenvolvido por Khoshghalb, Khalili e Selvadurai (2011), a *three-point finite difference technique* para a análise de equações diferenciais parciais.

A. Construção da matriz M

Neste apêndice será ilustrado um exemplo prático para a construção da matriz M .

Para este exemplo, serão utilizados os valores $N_x = 2$ e $N_v = 4$, o que gera um conjunto de 9 equações lineares por resolver utilizando a equação (3.9) e consequentemente uma matriz de dimensões $(3 \times 3)(3 \times 3)$, ficando assim com a malha de pontos: $[(x_j, v_i) \mid j = -2, \dots, 0, \dots, 2 \quad i = 0, \dots, 4]$.

Para $i=1$ e $j=-N_x + 1 \Leftrightarrow j=-1$,

$$P1_{-1,1}W_{0,1}^{k+1} + P2_{-1,1}W_{-2,1}^{k+1} + P3_{-1,1}W_{-1,2}^{k+1} + P4_{-1,1}W_{-1,0}^{k+1} + P5_{-1,1}W_{-1,1}^{k+1} + P6_{-1,1} \times \\ (W_{0,2}^{k+1} - W_{-2,2}^{k+1} - W_{0,0}^{k+1} + W_{-2,0}^{k+1}).$$

Com $j=-N_x + 2 \Leftrightarrow j=0$,

$$P1_{0,1}W_{1,1}^{k+1} + P2_{0,1}W_{-1,1}^{k+1} + P3_{0,1}W_{0,2}^{k+1} + P4_{0,1}W_{0,0}^{k+1} + P5_{0,1}W_{0,1}^{k+1} + P6_{0,1} \times \\ (W_{1,2}^{k+1} - W_{-1,2}^{k+1} - W_{1,0}^{k+1} + W_{-1,0}^{k+1}).$$

Com $j=N_x - 1 \Leftrightarrow j=1$,

$$P1_{1,1}W_{2,1}^{k+1} + P2_{1,1}W_{0,1}^{k+1} + P3_{1,1}W_{1,2}^{k+1} + P4_{1,1}W_{1,0}^{k+1} + P5_{1,1}W_{1,1}^{k+1} + P6_{1,1} \times \\ (W_{2,2}^{k+1} - W_{0,2}^{k+1} - W_{2,0}^{k+1} + W_{0,0}^{k+1}).$$

Para $i=2$ e $j=-N_x + 1 \Leftrightarrow j=-1$,

$$P1_{-1,2}W_{0,2}^{k+1} + P2_{-1,2}W_{-2,2}^{k+1} + P3_{-1,2}W_{-1,3}^{k+1} + P4_{-1,2}W_{-1,1}^{k+1} + P5_{-1,2}W_{-1,2}^{k+1} + P6_{-1,2} \times \\ (W_{0,3}^{k+1} - W_{-2,3}^{k+1} - W_{0,1}^{k+1} + W_{-2,1}^{k+1}).$$

Com $j=-N_x + 2 \Leftrightarrow j=0$,

$$P1_{0,2}W_{1,2}^{k+1} + P2_{0,2}W_{-1,2}^{k+1} + P3_{0,2}W_{0,3}^{k+1} + P4_{0,2}W_{0,1}^{k+1} + P5_{0,2}W_{0,2}^{k+1} + P6_{0,2} \times \\ (W_{1,3}^{k+1} - W_{-1,3}^{k+1} - W_{1,1}^{k+1} + W_{-1,1}^{k+1}).$$

Com $j=N_x - 1 \Leftrightarrow j=1$,

$$P1_{1,2}W_{2,2}^{k+1} + P2_{1,2}W_{0,2}^{k+1} + P3_{1,2}W_{1,3}^{k+1} + P4_{1,2}W_{1,1}^{k+1} + P5_{1,2}W_{1,2}^{k+1} + P6_{1,2} \times \\ (W_{2,3}^{k+1} - W_{0,3}^{k+1} - W_{2,1}^{k+1} + W_{0,1}^{k+1}).$$

Para $i=3$ e $j=-N_x + 1 \Leftrightarrow j=-1$,

$$P1_{-1,3}W_{0,3}^{k+1} + P2_{-1,3}W_{-2,3}^{k+1} + P3_{-1,3}W_{-1,4}^{k+1} + P4_{-1,3}W_{-1,2}^{k+1} + P5_{-1,3}W_{-1,3}^{k+1} + P6_{-1,3} \times \\ (W_{0,4}^{k+1} - W_{-2,4}^{k+1} - W_{0,2}^{k+1} + W_{-2,2}^{k+1}).$$

Com $j=-N_x + 2 \Leftrightarrow j=0$,

$$P1_{0,3}W_{1,3}^{k+1} + P2_{0,3}W_{-1,3}^{k+1} + P3_{0,3}W_{0,4}^{k+1} + P4_{0,3}W_{0,2}^{k+1} + P5_{0,3}W_{0,3}^{k+1} + P6_{0,3} \times \\ (W_{1,4}^{k+1} - W_{-1,4}^{k+1} - W_{1,2}^{k+1} + W_{-1,2}^{k+1}).$$

Com $j=N_x - 1 \Leftrightarrow j=1$,

$$P1_{1,3}W_{2,3}^{k+1} + P2_{1,3}W_{0,3}^{k+1} + P3_{1,3}W_{1,4}^{k+1} + P4_{1,3}W_{1,2}^{k+1} + P5_{1,3}W_{1,3}^{k+1} + P6_{1,3} \times \\ (W_{2,4}^{k+1} - W_{0,4}^{k+1} - W_{2,2}^{k+1} + W_{0,2}^{k+1}).$$

Sem considerar as condições de fronteira, isto é, os limites discretos localizados em $j=-2$, $i=0$, $j=2$ e $i=4$, ficamos com a matriz M :

$$M = \begin{bmatrix} P5_{-1,1} & P1_{-1,1} & 0 & P3_{-1,1} & P6_{-1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P2_{0,1} & P5_{0,1} & P1_{0,1} & -P6_{0,1} & P3_{0,1} & P6_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P2_{1,1} & P5_{1,1} & 0 & -P6_{1,1} & P3_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ P4_{-1,2} & -P6_{-1,2} & 0 & P5_{-1,2} & P1_{-1,2} & 0 & P3_{-1,2} & P6_{-1,2} & 0 \\ P6_{0,2} & P4_{0,2} & -P6_{0,2} & P2_{0,2} & P5_{0,2} & P1_{0,2} & -P6_{0,2} & P3_{0,2} & P6_{0,2} \\ 0 & P6_{1,2} & P4_{1,2} & 0 & P2_{1,2} & P5_{1,2} & 0 & -P6_{1,2} & P3_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & P4_{-1,3} & -P6_{-1,3} & 0 & P5_{-1,3} & P1_{-1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P6_{0,3} & P4_{0,3} & -P6_{0,3} & P2_{0,3} & P5_{0,3} & P1_{0,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P6_{1,3} & P4_{1,3} & 0 & P2_{1,3} & P5_{1,3} \end{bmatrix},$$

onde cada linha corresponde a cada uma das equações já referidas.

E as matrizes A , B e C de dimensões 3×3 são definidas por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} P5_{-1,1} & P1_{-1,1} & 0 \\ P2_{0,1} & P5_{0,1} & P1_{0,1} \\ 0 & P2_{1,1} & P5_{1,1} \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} P3_{-1,1} & P6_{-1,1} & 0 \\ -P6_{0,1} & P3_{0,1} & P6_{0,1} \\ 0 & -P6_{1,1} & P3_{1,1} \end{bmatrix};$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} P4_{-1,2} & -P6_{-1,2} & 0 \\ P6_{0,2} & P4_{0,2} & -P6_{0,2} \\ 0 & P6_{1,2} & P4_{1,2} \end{bmatrix}.$$

Em suma, a matriz M pode ser representada por:

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 \\ C_2 & A_2 & B_2 \\ 0 & C_3 & A_3 \end{bmatrix}.$$

B. Código Matlab

Código para o método de Crank-Nicolson, para avaliar opções Americanas.

```
function [W]=CranknicolsonAmerican(kappa,theta,sigma,rho,r,q,S0,V0
,T,Smax,Nx,Nv,N,K,opcao, tipo)
%%
%DADOS

%kappa=velocidade de reversao para a media
%tetha=media de longo prazo da variancia
%sigma=volatilidade do processo de variancia
%rho=correlacao
%r=taxa de juro sem juro
%q=taxa de dividendos
%S0=valor spot
%V0=valor inicial de volatilidade
%T=tempo para a maturidade
%Smax=preo maximo para o ativo
%Nx=particoes do spot
%Nv=particoes da volatilidade
%N=particoes do tempo
%K=strike
%opcao=Escolher se a opcao e Americana "A" ou se e Europeia "E"
%tipo= Escolher se e opcao de compra "c" ou opcao de venda "p"

%%
%stepsize 's e incrementos
tic
```

```

format long
Ymax=1;
Xmax=log (Smax/S0);
l=(2*Xmax)/(2*Nx); %stepsize do xt
m=Ymax/Nv; %stepsize do V
h=T/N; %stepsize do tempo
ps=zeros((2*Nx+1),1);
for j=-Nx:1:Nx
ps(j+Nx+1)=S0*exp(j*l);
end
py=0:m:Ymax;
pv=py.^2;
%Encontrar os valores de S0 e V0
k=Nx;
k1=find(abs(pv-V0)<0.00001)-1;
W0=zeros((2*Nx-1)*(Nv-1),1);
S=zeros((2*Nx-1)*(Nv-1),1);

if tipo=='p' %Se e uma Put
%Condicao inicial

for a=1:(2*Nx-1):(Nv-1)*(2*Nx-1)
W0(a:(a+(2*Nx-2)),1)=max((K-ps(2:(2*Nx),1)),0);
end
% 2 parte da condicao j=-Nx+1----> matriz S
c=1;
for z=1:(2*Nx-1):(2*Nx-1)*(Nv-1)
S(z,1)=-2*h*((( -pv(c+1)*((1/2)+1))+(1*(r-q)))/(4*l^2))*S0*(
exp(-l*Nx)*1); %P2*(lambda+lambda)
c=c+1;
end
end

if tipo=='c' %Se e uma Call
%Condicao inicial

```

```

for a=1:(2*Nx-1):(Nv-1)*(2*Nx-1)
    W0(a:(a+(2*Nx-2)),1)=max((ps(2:(2*Nx),1)-K),0);
end
% 2 parte da condicao j=Nx-1 ———> matriz S
c=1;
for z=(2*Nx-1):(2*Nx-1):(2*Nx-1)*(Nv-1)
    S(z,1)=2*h*((( -pv(c+1)*((1/2)+1))+(1*(r-q)))/(4*l^2))*S0*(
        exp(1*Nx)*1); %P2*(lambda+lambda)
    c=c+1;
end
end

%%
%Construcao da Matriz A, B e C para implementar a matriz M

A=zeros((2*Nx-1)*(Nv-1),(2*Nx-1));
B=zeros((2*Nx-1)*(Nv-1),(2*Nx-1));
C=zeros((2*Nx-1)*(Nv-1),(2*Nx-1));
for z=1:1:(Nv-1)
    a=zeros((2*Nx-1),(2*Nx-1));
    b=zeros((2*Nx-1),(2*Nx-1));
    c=zeros((2*Nx-1),(2*Nx-1));
    for p=1:1:(2*Nx-1)
        a(p,p)=1+h*(((pv(z+1)/(2*l^2))+((sigma^2*py(z+1))/(4*m^2))))
            ; %P5
        b(p,p)=h*((( -kappa*(theta-pv(z+1)))/(8*m*py(z+1)))-(((
            sigma^2)*(py(z+1)+m))/(8*m^2))); %P3
        c(p,p)=h*(((kappa*(theta-pv(z+1)))/(8*m*py(z+1)))-(((sigma
            ^2)*(py(z+1)-m))/(8*m^2))); %P4
        if (p-1>=1)
            a(p,p-1)=h*((( -pv(z+1)*((1/2)+1))+(1*(r-q)))/(4*l^2));
                %P2
            b(p,p-1)=h*(((rho*sigma*py(z+1))/(16*l*m))); %P6
            c(p,p-1)=h*(-(rho*sigma*py(z+1))/(16*l*m)); %P6
        end
    end

```

```

if (p+1<=(2*Nx-1))
    a(p,p+1)=h*((( -pv(z+1)*(-(1/2)+1))-(1*(r-q)))/(4*l^2))
        ; %P1
    b(p,p+1)=h*((-rho*sigma*py(z+1))/(16*l*m)); %P6
    c(p,p+1)=h*((rho*sigma*py(z+1))/(16*l*m)); %P6
end
if p==1 %condicao j=-Nx+1 (very small spot)
    a(p,p)=a(p,p)+h*((( -pv(z+1)*(-(1/2)+1))+(1*(r-q)))/(4*l^2)); %P5+P2
    b(p,p)=f(p,p)+h*((rho*sigma*py(z+1))/(16*l*m)); %P3-P6
    c(p,p)=e(p,p)+h*((-rho*sigma*py(z+1))/(16*l*m)); %P4+
        P6
end
if p==(2*Nx-1) %condicao j=Nx-1 (very large spot)
    a(p,p)=a(p,p)+h*((( -pv(z+1)*(-(1/2)+1))-(1*(r-q)))/(4*l^2)); %P5+P1
    b(p,p)=f(p,p)+h*((-rho*sigma*py(z+1))/(16*l*m)); %P3+
        P6
    c(p,p)=e(p,p)+h*((rho*sigma*py(z+1))/(16*l*m)); %P4-P6
end
%Condicao i=Nv-1 (valores de volatilidade grandes)
if z==(Nv-1)
    if p==1
        a(p,p)=a(p,p)+f(p,p); %P5+P2+P3-P6
        a(p,p+1)=a(p,p+1)+h*((-rho*sigma*py(z+1))/(16*l*m)); %
            P1+P6
    end
    if p==(2*Nx-1)
        a(p,p)=a(p,p)+f(p,p); %P5+P1+P3+P6
        a(p,p-1)=a(p,p-1)+h*((rho*sigma*py(z+1))/(16*l*m));
            %P2-P6
    end
    if p>1 && p<(2*Nx-1)
        a(p,p)=a(p,p)+h*((( -kappa*(theta-pv(z+1)))/(8*m*py
            (z+1)))-(((sigma^2)*(py(z+1)+m))/(8*m^2))); %P5
            +P3

```

```

        if (p-1>=1)
            a(p,p-1)=a(p,p-1)+h*((rho*sigma*py(z+1))/(16*l*m
                )); %P2-P6
        end
        if (p+1<=(2*Nx-1))
            a(p,p+1)=a(p,p+1)+h*((-rho*sigma*py(z+1))/(16*l
                *m)); %P1+P6
        end
    end
end

end

A((z-1)*(2*Nx-1)+1:z*(2*Nx-1),1:(2*Nx-1))=a; %A1,A2... por
    ordem dentro da matriz A
B((z-1)*(2*Nx-1)+1:z*(2*Nx-1),1:(2*Nx-1))=b; %""
C((z-1)*(2*Nx-1)+1:z*(2*Nx-1),1:(2*Nx-1))=c; %""

end

for i=1:(2*Nx-1):(Nv-1)*(2*Nx-1)
    for j=1:(2*Nx-1):(2*Nx-1)*(2*Nx-1)
        if (i==j)
            M(i:i+(2*Nx-2),i:i+(2*Nx-2))=A(i:i+(2*Nx-2),1:(2*Nx
                -1)); % A's na diagonal principal da matriz M
        end
        if (i>j)
            M(i:i+(2*Nx-2),(i-(2*Nx-1)):(i-1))=C(i:i+(2*Nx-2)
                ,1:(2*Nx-1)); % C's na diagonal inferior da matriz
                M
        end
        if (j+1<=(2*Nx-1)&& i<((Nv-1)*(2*Nx-1)-(2*Nx-2)))
            M(i:i+(2*Nx-2),i+(2*Nx-1):i+(2*Nx-1)+(2*Nx-2))=B(i:i
                +(2*Nx-2),1:(2*Nx-1)); % B's na diagonal superior
                da matriz M
        end
    end
end

```

```

end

end

%%
%Condicao V=0

Q=zeros((2*Nx-1),1);

for j=1:1:(2*Nx-1)
    Q(j,j)=1+h*((sigma^2)/(2));
    if j-1>=1
        Q(j,j-1)=h*((r-q)/(4*l));
    end
    if j<(2*Nx-1)
        Q(j,j+1)=h*((r-q)/(4*l));
    end
end

Q1=(2-r*h)*eye((2*Nx-1))-Q;
QQ=zeros((2*Nx-1),1);

for j=1:1:(2*Nx-1)
    if j==1
        QQ(j,j)=h*(((kappa*(theta-pv(2)))/(8*m*py(2)))-(((sigma^2)*(py(2)-m))/(4*m^2)))+h*(-(rho*sigma*py(2))/(16*l*m)); %(P4+P6)
    end
    if j==(2*Nx-1)
        QQ(j,j)=h*(((kappa*(theta-pv(2)))/(8*m*py(2)))-(((sigma^2)*(py(2)-m))/(4*m^2)))+h*((rho*sigma*py(2))/(8*l*m)); %(P4-P6)
    end
    if j>1 && j<(2*Nx-1)
        QQ(j,j)=h*(((kappa*(theta-pv(2)))/(8*m*py(2)))-(((sigma^2)*(py(2)-m))/(4*m^2)))); %P4
    end
end

```

```

end
if j-1>=1
    QQ(j,j-1)=h*(-(rho*sigma*py(2))/(16*l*m)); %P6
end
if j<(2*Nx-1)
    QQ(j,j+1)=h*((rho*sigma*py(2))/(16*l*m)); %P6
end
end
M(1:(2*Nx-1),1:(2*Nx-1))=M(1:(2*Nx-1),1:(2*Nx-1))+Q\QQ*((sigma^2)/
(2));
D=(2-r*h)*eye((2*Nx-1)*(Nv-1))-M; %criacao da matriz D

%%

%Processo iterativo
V=zeros((2*Nx-1)*(Nv-1),1);
V(1:(2*Nx-1))=W0(1:(2*Nx-1));
Wtil=W0;
for t=1:1:N %inicio da resolucao do problema

    V(1:(2*Nx-1))=QQ*((Q\((Q1*V(1:(2*Nx-1)))))+ones((2*Nx-1),1)); %
        udpate para v=0
    Wtil=M\((D*Wtil+S+V)); %processo iterativo
    if opcao=='A'; %se a opcao e do tipo Americana
        Wtil=max(Wtil,W0*exp(r*t*h));
    end
    Wtil=max(Wtil,0);
end
W=Wtil((2*Nx-1)*(k1-1)+k,1); %valor da opcao
toc
end

```

Bibliografia

- [1] Natalia Beliaeva and Sanjay K Nawalkha. Multidimensional transform for pricing american options under stochastic volatility jump models. *Technical Note*, 2008.
- [2] Natalia Beliaeva and Sanjay K Nawalkha. A simple approach to pricing american options under the Heston stochastic volatility model. *The Journal of Derivatives*, 17(4):25–43, 2010.
- [3] F. Black and M Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [4] Michael J. Brennan and Eduardo S. Schwartz. The valuation of american put options. *The Journal of Finance*, 32(2):449–462, 1977.
- [5] Michael J Brennan and Eduardo S Schwartz. Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: A synthesis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13(3):461–474, 1978.
- [6] Georges Courtadon. A more accurate finite difference approximation for the valuation of options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17(5):697–703, 1982.
- [7] John C Cox, Jonathan E Ingersoll Jr, and Stephen A Ross. An intertemporal general equilibrium model of asset prices. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 53(2):363–384, 1985.
- [8] Daniel J Duffy. A critique of the Crank Nicolson scheme strengths and weaknesses for financial instrument pricing. *The Best of Wilmott*, page 333, 2002.
- [9] William Feller. Two singular diffusion problems. *Annals of Mathematics*, 54(1):173–182, 1951.
- [10] Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, and K Ronnie Sircar. *Derivatives in financial markets with stochastic volatility*. Cambridge University Press, 2000.

- [11] S. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6(2):327–343, 1993.
- [12] J. Hull. Options, Futures and Others Derivatives. *tenth ed. (Prentice-Hall)*, 2018.
- [13] Samuli Ikonen and Jari Toivanen. *Operator splitting methods for pricing American options with stochastic volatility*. 2004.
- [14] A Khoshghalb, N Khalili, and APS Selvadurai. A three-point time discretization technique for parabolic partial differential equations. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 35(3):406–418, 2011.
- [15] J Douglas Lawson and J Ll Morris. The extrapolation of first order methods for parabolic partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 15(6):1212–1224, 1978.
- [16] R.C. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 1973.
- [17] Eduardo S Schwartz. The valuation of warrants: Implementing a new approach. *Journal of Financial Economics*, 4(1):79–93, 1977.
- [18] Elias M Stein and Jeremy C Stein. Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach. *The Review of Financial Studies*, 4(4):727–752, 1991.
- [19] Domingo Tavella and Curt Randall. *Pricing Financial Instruments: The Finite Difference Method (Wiley Series in Financial Engineering)*. Wiley New York, 2000.